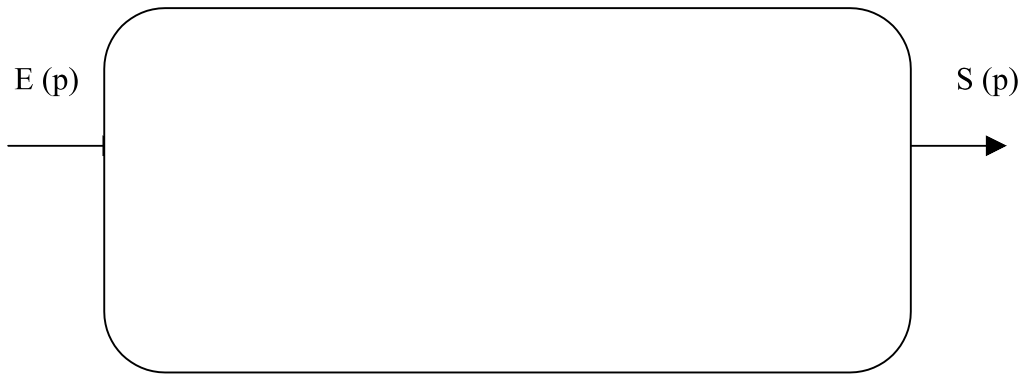
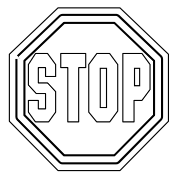
Précision, rapidité et stabilité

F.T.B.F : Fonction de Transfert en Boucle Fermée et F.T.B.O : Fonction de Transfert en Boucle Ouverte
Cas des systèmes bouclés





K : ampli de gain réglable, le système à asservir de fonction de transfert G (p) et une boucle de retour de FT F (p).

Variables : entrée E (p), retour F (p), écart ε (p), commande C (p) et la sortie S (p).

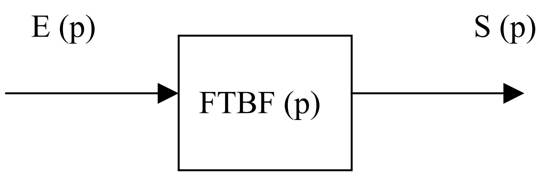
Quand on cherche la relation liant S (p) à E (p) , on a :

S (p) = C (p) G (p) = ε (p) K G (p)
R (p) = S (p) F p
ε (p) = E p - R (p)

On obtient bien : $\boxed{S(p) = \dfrac{K\,G(p)}{1 + K\,G(p)\,F(p)}\,E(p)}$

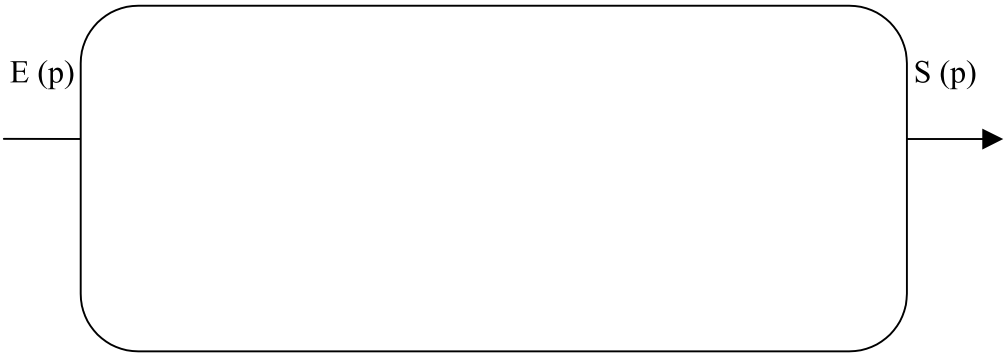
La fonction $\dfrac{K\,G(p)}{1 + K\,G(p)\,F(p)}$ est appelée Fonction de Transfert en Boucle Fermée

On se ramène donc au système suivant :



Il ne faut pas confondre La FTBO avec la fonction de transfert de la chaîne directe. Ces 2 fonctions ne sont égales que si F (p) = 1

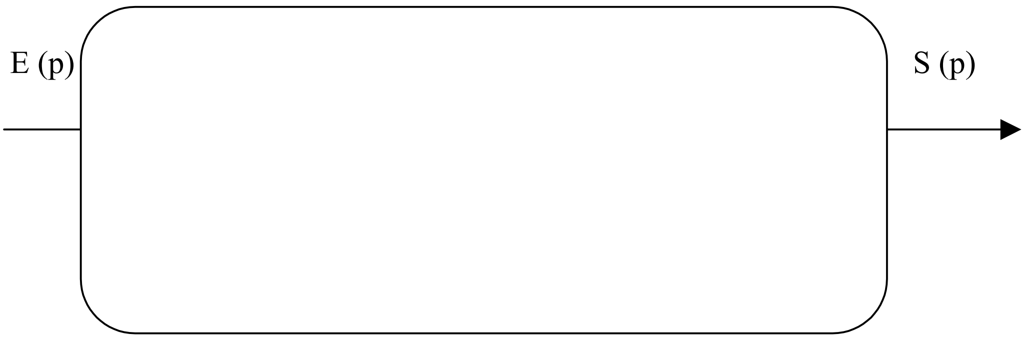
Systèmes bouclés à retour unitaire



On obtient bien : $\boxed{\text{FTBF (p)} = \dfrac{\text{FTBO (p)}}{1 + \text{FTBO (p)}}}$

Et $\boxed{\varepsilon\ (p) = \dfrac{1}{1 + K\ G\ (p)}\ E\ (p)}$ On obtient une relation de type $\dfrac{u}{1 + u}$

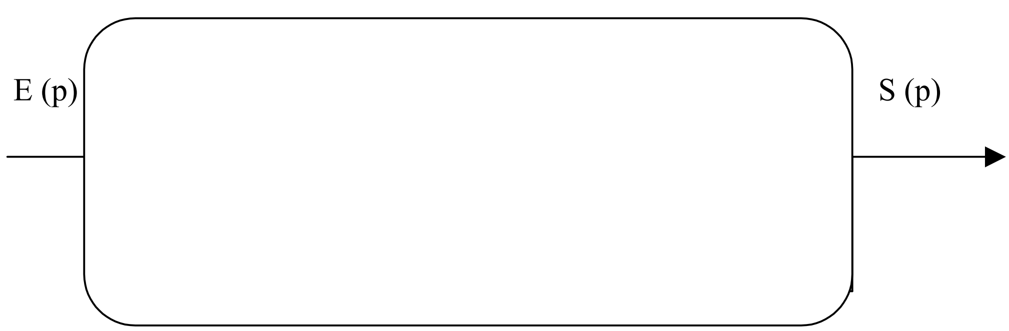
On peut également représenter l'exemple non-unitaire de la manière suivante :

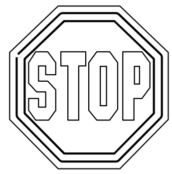


Et on retrouve bien

$S\ (p) = \dfrac{K\ G\ (p)}{1 + K\ G\ (p)\ F\ (p)}\ E\ (p)$: les deux systèmes sont bien équivalents.

Dans le cas d'un asservissement de vitesse : K regroupe Ka et Km.





Le comportement du système bouclé est décrit par la FTBF

$$FTBF = \frac{FTBO}{1 + FTBO} = \frac{\frac{K}{1 + Tm\,p}}{1 + \frac{K}{1 + Tm\,p}} = \frac{K}{1 + K + Tm\,p} = \frac{\frac{K}{1 + K}}{1 + \frac{Tm}{1 + K}\,p} = \frac{K'}{1 + T'\,p}$$

BTBF est bien une fonction de 1^{er} ordre

On en déduit que :

1) LE BOUCLAGE N'A PAS MODIFE L'ORDRE DU SYSTEME

Par contre, il a modifié les paramètres :

En bouclant un système du premier ordre de gain K, on obtient un système du premier ordre de gain $K' = \frac{K}{1+K}$; 1+K étant toujours supérieur à 1, le gain a diminué. En régime permanent, le système bouclé fournit une sortie plus faible qu'en chaîne directe à consigne équivalente : il faut adapter l'entrée.

2) LE BOUCLAGE A MODIFE LE GAIN DU SYSTEME

En bouclant un système du premier ordre de constante de temps Tm, on obtient un système du premier ordre de constante de temps $T' = \frac{Tm}{1+K}$. 1+K étant toujours supérieur à 1, la constante de temps a diminué. Le temps de réponse à 5% étant proportionnel à la constante de temps : Tr5% = 3T'

3) LE SYSTEME BOUCLE EST PLUS RAPIDE QUE LE SYSTEME EN BOUCLE OUVERTE. ON AMELIORE SA RAPIDITE EN AUGMENTANT LE GAIN DE BOUCLE K.

Qu'en est-il de la précision ? Pour ce système, on conçoit intuitivement que la précision soit l'écart entre la consigne et la sortie en régime permanent (ce qui n'est pas vrai pour un système à retour non unitaire). La précision, est, ***dans ce cas***, la valeur de s(t) lorsque t tend vers l'infini en réponse indicielle.

Si le système était parfaitement précis, il fournirait une sortie algébriquement égale à la consigne. La FTBF posséderait alors un gain unitaire et pour une consigne de lVolt le système fournirait une sortie égale à 1 unité de vitesse.

PERFORMANCES D'UN SERVOMECANISME.

PRECISION EN REGIME PERMANENT.

Considérons un système à retour unitaire (toujours pour des raisons de simplification) de fonction de transfert en boucle ouverte : $FTBO(p)=K\,G(p)=\dfrac{K\,N(p)}{p^{\alpha}\,D(p)}$

Gain K, classe α, N(p) et D(p) polynômes en p, ordre : $\alpha + \deg(D(p))$

La FTBF d'un tel système est : $FTBF(p) = H(p) = \dfrac{K\,G(p)}{1+K\,G(p)} = \dfrac{K\,N(p)}{p^{\alpha}\,D(p) + K\,N(p)}$

Si ce système est soumis à une entrée E(p), alors l'écart est :

$$\varepsilon(p) = \frac{1}{1+K\,G(p)}\,E(p) = \frac{p^{\alpha}\,D(p)}{p^{\alpha}\,D(p)+K\,N(p)}\,E(p)$$

Soumettons ce système aux entrées typiques en considérant trois cas :
$\alpha = 0$: système sans intégration de classe zéro
$\alpha = 1$: système avec une intégration de classe 1
$\alpha > 1$: système à plusieurs intégrations de classe α

Erreur de position ou écart statique εs

Le système est soumis à un échelon $e(t) = u(t) \Rightarrow E(p) = \dfrac{1}{p}$

On a : $\varepsilon(p) = \dfrac{p^{\alpha}\,D(p)}{p^{\alpha}\,D(p)+K\,N(p)}\,\dfrac{1}{p} = \dfrac{p^{\alpha-1}\,D(p)}{p^{\alpha}\,D(p)+K\,N(p)}$

La valeur de l'écart statique est obtenue par le théorème de la valeur finale.

$$\varepsilon s = \lim_{t\to\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p\to 0}\,[\,p\,\varepsilon(p)] = \lim_{p\to 0}\left[\frac{p^{\alpha}\,D(p)}{p^{\alpha}\,D(p)+K\,N(p)}\right]$$

Si $\alpha = 0 \Rightarrow \varepsilon s = \lim\limits_{p\to 0}\,[\,p\,\varepsilon(p)] = \dfrac{D(0)}{D(0)+K\,N(0)} = \dfrac{1}{1+K}$ avec des cond. nulles

Si $\alpha = 1 \Rightarrow \varepsilon s = \lim\limits_{p\to 0}\,[\,p\,\varepsilon(p)] = \dfrac{p\,D(0)}{p\,D(0)+K\,N(0)} = 0$

Si $\alpha > 1 \Rightarrow \varepsilon s = \lim\limits_{p\to 0}\,[\,p\,\varepsilon(p)] = \dfrac{p^{\alpha}\,D(0)}{p^{\alpha}\,D(0)+K\,N(0)} = 0$

Erreur de traînage ou écart dynamique εv

Le système est soumis à une rampe e (t) = t u (t) ➔ $E(p) = \frac{1}{p^2}$

On a : $\varepsilon(p) = \frac{p^\alpha D(p)}{p^\alpha D(p) + K N(p)} \frac{1}{p^2} = \frac{p^{\alpha-2} D(p)}{p^\alpha D(p) + K N(p)}$

Et par le théorème de la valeur finale, on obtient :

$$\varepsilon v = \lim_{t \to \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \to 0} [\, p\, \varepsilon(p)] = \lim_{p \to 0} \left[\frac{p^{\alpha-1} D(p)}{p^\alpha D(p) + K N(p)} \right]$$

Si $\alpha = 0$ ➔ $\varepsilon v = \lim_{p \to 0} [\, p\, \varepsilon(p)] = \frac{D(0)}{p\,(D(0) + K N(0))} = \infty$

Si $\alpha = 1$ ➔ $\varepsilon v = \lim_{p \to 0} [\, p\, \varepsilon(p)] = \frac{D(0)}{p\, D(0) + K N(0)} = \frac{1}{K}$

Si $\alpha > 1$ ➔ $\varepsilon v = \lim_{p \to 0} [\, p\, \varepsilon(p)] = \frac{p^{\alpha-1} D(0)}{p^\alpha D(0) + K N(0)} = 0$

En régime permanent, un système qui possède une intégration dans la BO possède un $\varepsilon s = 0$ Dans le cas contraire, εs diminue quand le gain en BO croît.

Critère de stabilité : Routh

Le critère de Routh vérifie si la définition fondamentale de la stabilité est vraie.
Un système linéaire de fonction de transfert G (p) est stable si les pôles sont à partie réelle <0.
Seul le dénominateur D (p) est concerné car les pôles de la fonction de transfert sont ses zéros.
Dans le cas d'un système bouclé, on considérera la FTBF. Le polynôme caractéristique est bien
D (p) = 1 + FTBO (p) .

La méthode de Routh permet de déterminer si les racines d'un polynôme sont >0. On vérifiera la stabilité théorique.
Considérons un polynôme D (p) $a_n\, p^n + a_{n-1}\, p^{n-1} + \ldots + a_1\, p + a_0$
On formera un tableau à n+1 lignes (cas ou n est pair) : la colonne encadrée est dite colonne des pivots.

p^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	....	a_2	a_0
p^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	....	a_1	
p^{n-2}	b_1	b_2	b_3	....		
p^{n-3}	c_1	c_2	....			
....	....	....				
....	....	....				
$p^1 = p$	....					
$P^0 = 1$	....					

Avec $b_1 = \frac{-1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}$ $b_2 = \frac{-1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix}$ $c_1 = \frac{-1}{b_1} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$ etc..

Critère de routh

1 Le système est stable si tous les termes de la colonne des pivots sont > 0.
2 Il y a autant de racines à partie réelle > 0 que de changements de signe (s) dans la colonne des pivots.
3 Une ligne de 0 indique l'existence de racines conjuguées imaginaires pures.

CRITERES DE STABILITE D'UN SYSTEME BOUCLE.

Définition.

Un système est stable si, écarté de sa position d'origine, il tend à y revenir.

Dans le cas inverse, il est instable. On peut interpréter "écarté de sa position d'origine" comme une perturbation. On considère parfois une autre définition : un système est stable si, à une entrée bornée, il répond par une sortie bornée. Cette dernière définition est mal adaptée aux servomécanismes dont la sortie est bornée lorsqu'ils pompent, car ils passent en régime non linéaire (saturation entre autres) et la théorie linéaire est à ce moment mise en défaut.
Pratiquement, on utilisera les deux critères suivants :

Critère algébrique (règle de Routh).

La condition mathématique de stabilité est la suivante :

Un système linéaire de fonction de transfert G(p) est stable si les pôles de G(p) possèdent tous une partie réelle négative.

Le critère de Routh, appliqué à l'équation caractéristique de la fonction de transfert, permet de déterminer si les racines de cette équation (qui sont les pôles de la F.T.) ont leur partie réelle négative sans avoir à résoudre l'équation. Pour la mise en œuvre du critère de Routh, se reporter au cours précédent.

Critère graphique (règle du revers).

La règle du revers s'applique dans le plan de Nyquist. Par contre, la règle du revers simplifiée dans le plan de Black doit être connue. En définissant le point critique comme étant le point de coordonnées (OdB, -180°), on écrit que :

Le système est stable en boucle fermée si, en parcourant le lieu de Black de la FTBO dans le sens des pulsations croissantes, on laisse le point critique à sa droite.

Les pulsations augmentant du haut vers le bas, on parcourt le lieu de Black avec la tête en bas et on laisse le point critique à droite : le système est stable en boucle fermée. Par contre, le point critique est à gauche en parcourant le lieu de Black du système : le système est instable en boucle fermée.

ATTENTION: pour le critère graphique, on considère la FTBO et non la FTBF.

Tableau de synthèse

Modèle en BO	1er ordre	2nd ordre	2nd ordre avec intégration
Asservissement	vitesse	Vitesse	Position
FTBO : K G (p)	$\frac{K}{1+Tp}$	$\frac{K}{1+\frac{2\zeta}{\omega_n}p+\frac{1}{\omega_n^2}p^2}$	$\frac{K}{p(1+Tp)}$
FTBF : $\frac{K\,G(p)}{1+K\,G(p)}$ retour unitaire	$\frac{K'}{1+T'p}$	$\frac{K'}{1+\frac{2\zeta'}{\omega'_n}p+\frac{1}{\omega_n'^2}p^2}$	$\frac{1}{1+\frac{2\zeta}{\omega_n}p+\frac{1}{\omega_n^2}p^2}$
Ecart statique εs	$\frac{1}{1+K}$	$\frac{1}{1+K}$	0
Ecart dynamique εv	∞	∞	1 / K
Stabilité	Stable	Stable	Stable
Gain statique K' en BF	$\frac{K}{1+K}$	$\frac{K}{1+K}$	1
Pulsation de coupure A 3 db	$\frac{1}{T'}=\frac{1+K}{T}$	$\omega'_n\sqrt{1-2\zeta'^2+\sqrt{1+(1-2\zeta'^2)}}$	$\omega_n\sqrt{1-2\zeta^2+\sqrt{1+(1-2\zeta^2)}}$