ANALYSE TEMPORELLE EXPERIMENTALE D'UN SYSTEME

• Système du premier ordre

Un système du premier ordre est régi par une équation différentielle du premier ordre du type :

$$s(t) + \tau . \frac{d}{dt} s(t) = K . e(t)$$

A savoir !!!

D'où après transformation de Laplace : $S(p) = \frac{K}{1 + \tau . p} . E(p)$

A) Réponse à un échelon unitaire

$e(t) = 1 \Rightarrow E(p) = \frac{1}{p}$ d'où $S(p) = \frac{K}{p . (1 + \tau . p)}$

après décomposition en éléments simples $S(p) = K \left(\frac{1}{p} - \frac{\tau}{1 + \tau . p}\right)$

On obtient donc, après transformation de Laplace inverse, $s(t) = K . \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$

Analyse temporelle :

Rapidité $\Rightarrow$ Temps de réponse à 5 % : $\mathbf{t_{5\%} = 3 . \tau}$ $s(3 . \tau) = 0,95 . K$

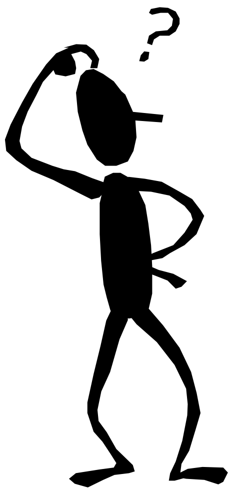
Précision $\Rightarrow \varepsilon_s = \lim_{t \to \infty} (e(t) - s(t)) = \mathbf{1 - K}$

B) Réponse à une rampe

$e(t) = t \Rightarrow E(p) = \frac{1}{p^2}$ d'où $S(p) = \frac{K}{p^2 . (1 + \tau . p)}$

après décomposition en éléments simples $S(p) = K \left(\frac{1}{p^2} - \frac{\tau}{P} + \frac{\tau^2}{1 + \tau . p}\right)$

On obtient donc, après transformation de Laplace inverse, $s(t) = K . \left(t - \tau + \tau . e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$



Système du second ordre

Un système du second ordre est régi par une équation différentielle du second ordre du type :

$$s(t) + 2 \cdot \frac{\xi}{\omega_n} \cdot \frac{d}{dt} s(t) + \frac{1}{\omega_n^2} \cdot \frac{d^2}{dt^2} s(t) = K \cdot e(t)$$

avec ξ : coefficient d'amortissement

ω_n : pulsation naturelle du système du second ordre

D'où après transformation de Laplace :

$$S(p) + 2 \cdot \frac{\xi}{\omega_n} \cdot p \cdot S(p) + \frac{1}{\omega_n^2} \cdot p^2 \cdot S(p) = K \cdot E(p)$$

A savoir !!!

Donc $S(p) = \dfrac{K \cdot \omega_n^2}{p^2 + 2 \cdot \xi \cdot \omega_n \cdot p + \omega_n^2} \cdot E(p)$ ou aussi $\dfrac{K}{\dfrac{p^2}{\omega_n^2} + \dfrac{2\,\xi}{\omega} \cdot p + 1}$

A) RÉPONSE À UN ÉCHELON UNITAIRE

A savoir !!!

$e(t) = 1 \Rightarrow E(p) = \frac{1}{p}$ d'où :

$$S(p) = \frac{K \cdot \omega_n^2}{p \cdot (p^2 + 2 \cdot \xi \cdot \omega_n \cdot p + \omega_n^2)} = K \cdot \left(\frac{1}{p} - \frac{p + 2 \cdot \xi \cdot \omega_n}{p^2 + 2 \cdot \xi \cdot \omega_n \cdot p + \omega_n^2}\right)$$

recherche des zéros du polynôme $p^2 + 2 . \xi . \omega_n . p + \omega_n^2 \Rightarrow \Delta^2 = 4 . \omega_n^2 . (\xi^2 - 1)$

• Si $\xi > 1$

p_1 et p_2 sont les racines réelles du polynôme précédent ($\Delta > 0$).

Décomposition en éléments simples de S(p) : $S(p) = K \cdot \left(\frac{1}{p} - \frac{A}{p - p_1} - \frac{B}{p - p_2}\right)$

Détermination de A et B : $A . (p - p_2) + B . (p - p_1) = p - p_1 - p_2$

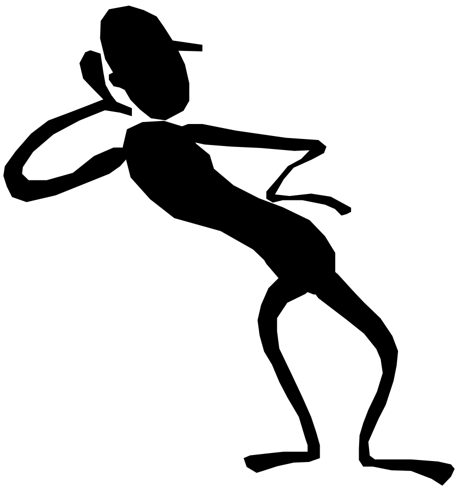
donc $A = \dfrac{p_2}{p_1 - p_2}$ $\qquad B = \dfrac{p_1}{p_1 - p_2}$

On obtient donc, après transformation de Laplace inverse,

$$s(t) = K . \left(1 - \frac{p_2}{p_1 - p_2} e^{p_1 t} - \frac{p_1}{p_2 - p_1} e^{p_2 t}\right)$$

Or p_1 et p_2 sont homogènes à des s^{-1}, on pose donc $\tau_1 = -1/p_1$ et $\tau_2 = -1/p_2$.

On en déduit $\mathbf{s(t) = K} \cdot \left(1 - \dfrac{1}{\tau_1 - \tau_2}\left(\tau_1 \cdot e^{-\frac{t}{\tau_1}} - \tau_2 \cdot e^{-\frac{t}{\tau_2}}\right)\right)$



• Si $\xi = 1$

$p_1 = p_2 = -\omega_n$ sont les racines doubles du polynôme précédent.

Donc $S(p) = K \cdot \left(\frac{1}{p} - \frac{p + 2 \cdot \omega_n}{(p+\omega_n)^2}\right) = K \cdot \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+\omega_n} - \frac{\omega_n}{(p+\omega_n)^2}\right)$

On obtient donc, après transformation de Laplace inverse,

$s(t) = K \cdot (1 - e^{-\omega_n t} - \omega_n \cdot t \cdot e^{-\omega_n t}) = K \cdot (1 - (1 + \omega_n \cdot t) \cdot e^{-\omega_n t})$

La réponse de ce système est donc également non oscillante et amortie

• Si $\xi < 1$

p_1 et p_2 sont les racines complexes du polynôme précédent ($\Delta<0$)

$p_1 = -\xi \cdot \omega_n + i \cdot \omega_n \cdot \sqrt{1-\xi^2}$ et $p_2 = -\xi \cdot \omega_n - i \cdot \omega_n \cdot \sqrt{1-\xi^2}$

$$S(p) = K \cdot \left(\frac{1}{p} - \frac{p + 2 \cdot \xi \cdot \omega_n}{(p-p_1) \cdot (p-p_2)}\right)$$

$$= K \cdot \left(\frac{1}{p} - \frac{p + 2 \cdot \xi \cdot \omega_n}{\left((p+\xi \cdot \omega_n) - i \cdot \omega_n \cdot \sqrt{1-\xi^2}\right) \cdot \left((p+\xi \cdot \omega_n) + i \cdot \omega_n \cdot \sqrt{1-\xi^2}\right)}\right)$$

$$= K \cdot \left(\frac{1}{p} - \frac{p + 2 \cdot \xi \cdot \omega_n}{\left((p+\xi \cdot \omega_n)^2 + \left(\omega_n \cdot \sqrt{1-\xi^2}\right)\right)^2}\right)$$

$$= K \cdot \left(\frac{1}{p} - \frac{p + \xi \cdot \omega_n}{(p+\xi \cdot \omega_n)^2 + \left(\omega_n \cdot \sqrt{1-\xi^2}\right)^2} - \frac{\xi \cdot \omega_n}{\left((p+\xi \cdot \omega_n)^2 + \left(\omega_n \cdot \sqrt{1-\xi^2}\right)\right)^2}\right)$$

A savoir !!!
Les signes

On obtient donc, après transformation de Laplace inverse,

$$s(t) = K \cdot \left(1 - e^{-\xi \cdot \omega_n \cdot t} \cdot \left(\cos\left(\omega_n \cdot t \cdot \sqrt{1-\xi^2}\right) - \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \cdot \sin\left(\omega_n \cdot t \cdot \sqrt{1-\xi^2}\right)\right)\right)$$

$$s(t) = K \cdot \left(1 - \frac{e^{-\xi \cdot \omega_n \cdot t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \cdot \left(\sqrt{1-\xi^2} \cdot \cos\left(\omega_n \cdot t \cdot \sqrt{1-\xi^2}\right) - \xi \cdot \sin\left(\omega_n \cdot t \cdot \sqrt{1-\xi^2}\right)\right)\right)$$

$$\mathbf{s(t) = K \cdot \left(1 - \frac{e^{-\xi \cdot \omega_n \cdot t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \cdot \sin\left(\omega_n \cdot t \cdot \sqrt{1-\xi^2} + \varphi\right)\right) \text{ avec } \cos(\varphi) = \xi}$$

Le comportement d'un tel système est oscillant et amorti.

Erreur statique

$$\varepsilon_s = \lim_{t \to +\infty} (e(t) - s(t)) = \lim_{p \to 0} (p \, . \, E(p) - p \, . \, S(p)) = 1 - K$$

B. RÉPONSE À UNE RAMPE

$e(t) = t \Rightarrow E(p) = \dfrac{1}{p^2}$ d'où

$$S(p) = \frac{K \, . \, \omega_n^2}{p^2 \, . \, (p^2 + 2 \, . \, \xi \, . \, \omega_n \, . \, p + \omega_n^2)} = K \, . \left(\frac{A}{p^2} + \frac{B}{p} + \frac{C \, . \, p + D}{p^2 + 2 \, . \, \xi \, . \, \omega_n \, . \, p + \omega_n^2} \right)$$

Par identification, on obtient $A = 1 \quad B = -\dfrac{2 \, . \, \xi}{\omega_n} \quad C = \dfrac{2 \, . \, \xi}{\omega_n} \quad D = 4 \, . \, \xi^2 - 1$

$$S(p) = K \, . \left(\frac{1}{p^2} - \frac{2 \, . \, \xi}{\omega_n} \, . \, \frac{1}{p} + \frac{\frac{2 \, . \, \xi}{\omega_n} . \, p + 4 \xi^2 - 1}{p^2 + 2 \, . \, \xi \, . \, \omega_n \, . \, p + \omega_n^2} \right)$$

Ensuite le polynôme $p^2 + 2 \, . \, \xi \, . \, \omega_n \, . \, p + \omega_n^2$ doit être décomposé en fonction de ses racines comme précédemment (en fonction des valeurs de ξ par rapport à 1).

Remarque : pour $\xi < 1$, on obtient également une réponse oscillante et amortie.