Décomposition d'une fraction rationnelle en éléments simples.

Considérons la fraction :

$$\boxed{F(x) = \frac{x+5}{(x-1)(x+2)}}$$

et cherchons une identité de la forme :

$$\frac{x+5}{(x-1)(x+2)} \equiv \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}$$

en multipliant les 2 membres de cette identité par (x-1)(x-2); on obtient en faisant x=-2 et ensuite x= 1:

$x+5 \equiv A(x+2) + B(x-1)$, identité qui est vérifiée pour A= 2 et B = -1
La décomposition est la suivante :

$$\boxed{\frac{x+5}{(x-1)(x+2)} \equiv \frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+2}}$$

Les deux fractions obtenues sont appelées éléments simples de la fraction donnée.

A- Le dénominateur Q(x) n'a que des racines simples réelles.

$$\boxed{F(x) = \frac{P(x)}{(x-a)(x-b)(x-c)}}$$

Cherchons une décomposition de la forme

$$\frac{P(x)}{(x-a)(x-b)(x-c)} \equiv \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} \qquad (1)$$

En * successivement (1) par x-a, x-b, x-c et en faisant x =a , x = b et x = c, on obtient :

$$\boxed{A = \frac{P(a)}{(a-b)(a-c)} \; , \; B = \frac{P(b)}{(b-a)(b-c)} \; \text{et} \; C = \frac{P(c)}{(c-a)(c-b)}}$$

L'identité (1) est possible et aux racines simples a, b et c correspondent les éléments simples $\frac{A}{x-a}$, $\frac{B}{x-b}$ et $\frac{C}{x-c}$

B- Le dénominateur a des racines réelles et multiples.

$$\text{Si } \boxed{f(x) = \frac{P(x)}{(x-a)^m\ Q(x)}}$$

On peut trouver A1 tel que :

$$\frac{P(x)}{(x-a)^m\ Q(x)} \equiv \frac{A1}{(x-a)^m} + \frac{P1(x)}{(x-a)^{m-1}\ Q(x)} \qquad (1)$$

en * (1) par (x-a) ^{m} , on obtient pour x = a

$$A1 = \frac{P(a)}{Q(a)}$$

On en déduit le polynôme P1(x) en retranchant A1/(x-a) ^{m} de $f(x)$

De la même manière A2

$$\frac{P1(x)}{(x-a)^{m-1}\ Q(x)} = \frac{A2}{(x-a)^{m-1}} + \frac{P2(x)}{(x-a)^{m-2}\ Q(x)}$$

et ainsi de suite.
On trouvera donc les éléments simples suivants :

$$\frac{B1}{(x-b)^{p}}, \frac{B2}{(x-b)^{p-1}}, \ldots, \frac{C1}{(x-c)^{q}}, \ldots, \frac{Cq}{(x-c)}$$

qui permettront d'obtenir :

$$\boxed{\frac{P(x)}{(x-a)^m\ (x-b)^p (x-c)^q)} \equiv \frac{A1}{(x-a)^m} + \ldots + \frac{Am}{x-a} + \frac{B1}{(x-b)^{p}} + .. + \frac{Bp}{x-b} + \frac{C1}{(x-c)^{q}} + .. + \frac{Cq}{x-c}}$$