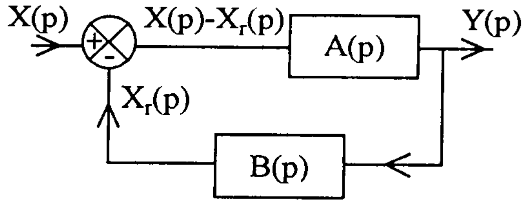
Révisions : précision des systèmes asservis.

1. Définitions.

Considérons le système asservi de la figure . Nous souhaitons que la sortie y(t) évolue en fonction du temps conformément à la consigne x(t). Afin d'évaluer la précision du système, nous définissons comme erreur e(t) à un instant donné la différence entre la valeur de l'entrée x (t) et la valeur du retour



x_r (t). Le comportement idéal correspond à une erreur e(t) nulle à chaque instant. En réalité, cette erreur est non nulle pour deux raisons. La première est que l'entrée x(t) varie dans le temps. Minimiser l'erreur e(t) lorsque l'entrée du système varie c'est résoudre **un problème de poursuite.** La deuxième raison qui entraîne une erreur non nulle provient des perturbations qui se superposent au signal utile du système. Minimiser l'erreur malgré l'existence de ces perturbations c'est résoudre **un problème de régulation.**

L'erreur $e(t) = x(t) - x_r(t)$ s'exprime après transformation de Laplace par $E(p) = X(p) - X_r(p)$. Comme on a $Y(p) = \dfrac{A(p)}{1 + A(p)B(p)} X(p)$ on retrouve bien

$$\boxed{E(p) = X(p) - B(p)Y(p) = \frac{X(p)}{1 + A(p)B(p)}}$$

2. Erreur en régime permanent

Nous nous intéressons ici à l'erreur en régime permanent, c'est-à-dire à l'erreur e(t) lorsque t tend vers l'infini. Afin d'établir la relation entre la valeur temporelle lorsque t tend vers l'infini et la valeur symbolique nous appliquons le théorème de la valeur finale.

$$\boxed{\lim_{t \to \infty} e(t) = \lim_{p \to 0} p\,E(p) = \lim_{p \to 0} \frac{p\,X(p)}{1 + A(p)B(p)}}$$

L'erreur en régime permanent ne dépend donc que de l'entrée X(p) et de la fonction de transfert en boucle ouverte F(p) = A(p)B(p). Puisque nous recherchons la valeur limite lorsque p tend vers 0, nous mettons la FTBO sous la forme $F(p) = \frac{C}{p^{\alpha}} \cdot \frac{1 + b_1 p + ...}{1 + a_1 p + ...}$; dans cette expression, α désigne la classe du système en boucle ouverte et C désigne le gain.

Au voisinage de zéro, la FTBO F(p) est équivalente à $\frac{C}{p^{\alpha}}$. Pour que l'erreur en régime permanent soit faible, il faut que les constantes C et α soient grandes. Nous avons vu que cette condition s'oppose à la condition de stabilité du système. Nous en concluons que **les conditions de stabilité et de précision sont contradictoires.**

Nous pouvons donc étudier les erreurs en régime permanent pour différentes entrées.

2.1. Erreur indicielle.

Lorsque l'entrée x(t) du système est un échelon unitaire, nous savons que sa transformée

de Laplace vaut $X(p) = \frac{1}{p}$. L'erreur en régime permanent encore appelée erreur statique ou ε_s ou erreur de position vaut alors :

$$\boxed{\lim_{t \to \infty} e(t) = \lim_{p \to 0} p \cdot \frac{X(p)}{1 + A(p)B(p)} = \lim_{p \to 0} \frac{1}{1 + \frac{C}{p^{\alpha}}}}$$

Le résultat dépend de la classe du système, c'est à dire de la valeur de la constante α.

2.1.1. Système de classe zéro (α = O).

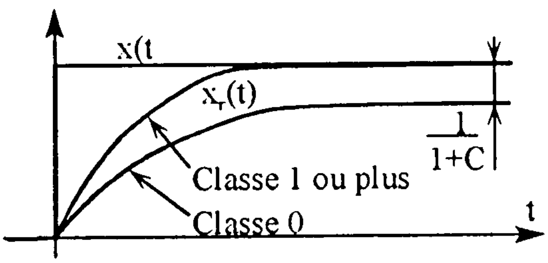
Dans ce cas, l'erreur en régime Permanent est constante et vaut:

$$\boxed{\lim_{t \to \infty} e(t) = \frac{1}{1 + C}}$$

2.1.2. Système de classe un ou plus (α > O).

L'erreur en régime permanent est nulle.

La figure représente la réponse indicielle de différents systèmes suivant leur classe. Nous retiendrons qu'un système qui possède au moins un intégrateur en boucle ouverte (système de classe au moins égale à un) possède une erreur indicielle nulle. S'il s'agit d'un système de classe zéro, I'erreur indicielle vaut $\frac{1}{1+C}$. Elle est alors d'autant plus faible que le gain C est élevé.



2.2. Erreur de traînage.

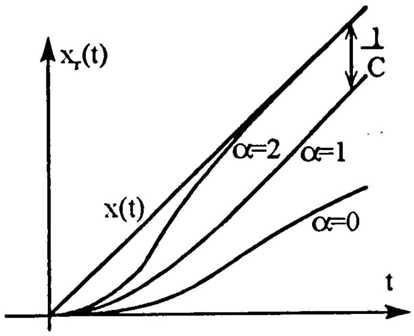
Cette erreur est obtenue lorsque l'entrée x(t) est une rampe (x(t) = t pour t > O). La transformée de Laplace vaut: $X(p) = \frac{1}{p^2}$. L'erreur en régime établi s'écrit alors:

$$\boxed{\lim_{t \to \infty} e(t) = \lim_{p \to 0} p \cdot \frac{X(p)}{1 + A(p)B(p)} = \lim_{p \to 0} \frac{1}{p} \frac{1}{1 + \frac{C}{p^{\alpha}}}}$$

Si le système est de classe O (α = O), l'erreur de traînage tend vers l'infini.

Si le système est de classe 1 (α =1), 1'erreur de traînage a une valeur finie et vaut $\frac{1}{C}$.

Pour un système de classe supérieure ou égale à 2, 1'erreur de traînage est nulle.



La figure ci-dessus illustre chacun de ces trois cas : est-ce clair Vincent ?

2.3. Erreur en accélération.

Lorsque le signal appliqué au système est parabolique, sa transformée de Laplace vaut $X(p) = \frac{1}{p^3}$.

L'erreur en régime permanent a pour expression

$$\boxed{\lim_{t \to +\infty} e(t) = \lim_{p \to 0} \frac{1}{p^2} \frac{1}{1 + \frac{C}{p^{\alpha}}}}$$

Il s'ensuit que pour un système de classe O ou 1, 1'erreur est infinie. Pour un système de classe 2, elle vaut $\frac{1}{C}$.

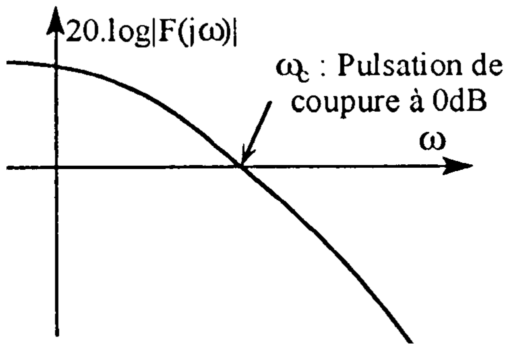
Le tableau suivant récapitule les différentes erreurs en fonction de la classe du système. Ainsi que nous l'avons déjà signalé, nous observons à partir de ce tableau que **pour diminuer l'erreur en régime permanent, il faut augmenter la classe du système (c'est-à-dire le nombre d'intégration(s) de la FTBO) et augmenter le gain.**

	Classe 0	**Classe 1**	**Classe 2**
Erreur de position	$\frac{1}{1+C}$	0	0
Erreur de traînage	∞	$\frac{1}{C}$	0
Erreur en accélération	∞	∞	$\frac{1}{C}$

2.4. Erreur pour un signal sinusoïdal.

En régime sinusoïdal, l'entrée x(t) est de la forme x(t) = X . sin(ω t). La valeur du retour $x_r(t)$ est également sinusoïdal et de même pulsation ω que l'entrée x(t). L'erreur e(t) = x(t) - $x_r(t)$ a pour module $E = \left| \frac{1}{1+A(j\omega)B(j\omega)} \right| X$. Il faut alors distinguer deux cas selon que le module de la FTBO F (j ω) = A (j ω) B (j ω) est prépondérant ou non devant 1.

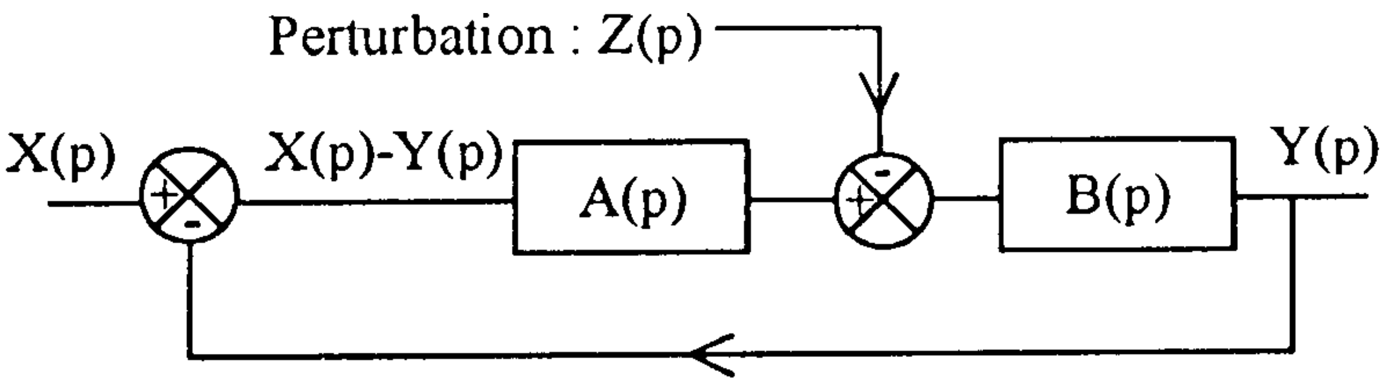
Pour un système physique, une allure typique de la FTBO est représentée dans Bode.



Plus la pulsation du signal d'entrée est grande et plus l'amplitude de la sortie du système est petite. La valeur ω_c est la pulsation de coupure à OdB, c'est-à-dire la valeur pour laquelle le module de la FTBO vaut OdB. Si ω est petit devant ω_c , alors le module de la FTBO est grand devant 1 et par conséquent, l'amplitude de l'erreur E est équivalente à $\frac{X}{|A(j\omega)B(j\omega)|}$ Si au contraire, ω est grand devant ω_c, alors le module de la FTBO est petit devant 1 et par conséquent, l'amplitude de l'erreur E est équivalente à X. Pour qu'un système soit précis en régime sinusoïdal sur une grande plage de fréquences ou de pulsations, il faut que sa pulsation de coupure soit élevée. De façon similaire, le temps de réponse d'un système dépend de sa bande passante. Un système sera donc d'autant plus rapide que sa bande passante sera grande (ou sa fréquence de coupure élevée). Nous avons ici un exemple d'une propriété fréquentielle (bande passante large ou fréquence de coupure élevée) qui a des conséquences dans le domaine temporel (rapidité de réponse du système).

3. Influence des perturbations.

Afin d'étudier l'influence des perturbations, considérons le système de la figure . Il s'agit d'un système à retour unitaire soumis à une perturbation dont la transformée de Laplace vaut Z(p).



L'erreur e(t) = x(t) - y(t) a pour transformée de Laplace E(p) = X(p) - Y(p) avec
Y(p) = B(p).(A(p).(X(p)-Y(p)) - Z(p)) . On obtient après mise en forme:

$$\boxed{E(p) = \frac{1}{1 + A(p)\,B(p)}\,X(p) + \frac{B(p)}{1 + A(p)\,B(p)}\,Z(P)}$$

La valeur obtenue se compose de deux termes: le premier représente la part de l'erreur due aux variations de l'entrée (erreur en poursuite) et le second la part de l'erreur due à la perturbation (erreur en régulation).

Afin de ne prendre en compte que les effets de la perturbation, nous considérons dans ce qui suit que l'entrée X(p) est nulle. Nous étudions l'erreur du système soumis à une perturbation en échelon unitaire et à une perturbation sinusoïdale.

3.1. Perturbation unitaire.

La perturbation est un échelon ➔ $Z(p) = \frac{1}{p}$.

L'erreur en régime permanent s'écrit alors :

$$\boxed{\lim_{t \to +\infty} e(t) = \lim_{p \to 0} \frac{C_B}{p^{\alpha_B} + p^{\alpha_A} C_A C_B}}$$

D' où le tableau :

	$\alpha_A = 0$	$\alpha_A = 1,2,..$
$\alpha_B = 0$	$\frac{C_B}{1 + C_A C_B}$	0
$\alpha_B = 1,2,..$	$\frac{1}{C_A}$	0

Conclusion :

L'erreur en régime permanent provoquée par une perturbation en échelon unitaire est nulle s'il existe au moins une intégration en amont de la perturbation ➔ voir cours précédents.

3.1. Perturbation sinusoïdale.

Ici, encore, le signal d'entrée x (t) est nul. La perturbation est de la forme $z(t) = Z \sin(\omega t)$. L'erreur $e(t) = x(t) - y(t)$ est alors de la forme $e(t) = E \sin(\omega t + \varphi)$. L'amplitude E, de l'erreur, vaut donc :

$$\boxed{E = \left| \frac{B(j\omega)}{1 + A(j\omega)\,B(j\omega)} \right| Z}$$