

SYSTEMES DU SECOND ORDRE

1. Définition

Equation différentielle du second ordre

$$s + \frac{2\zeta}{\omega_n} \frac{ds}{dt} + \frac{1}{\omega_n^2} \frac{d^2s}{dt^2} = K e$$

Avec des CI nulles, on obtient comme fonction de transfert :



ζ : coefficient d'amortissement réduit

ω_n : pulsation propre non amortie ou pulsation de coupure à 90°.

Exemple

Pour un moteur électrique (avec inductance)

$$U = Ri + L \frac{di}{dt} + e$$

$$J \frac{d\omega}{dt} = C_m - C_r$$

$$C_m = K_i \quad \text{et} \quad e = K \omega$$

Par Laplace, on obtient :



Avec $T_e = \frac{L}{R}$ et $T_m = \frac{J_t R}{K^2}$

On obtient tout simplement :

$$\Omega(p) = \frac{1}{K(1 + T_m p + T_e T_m p^2)} U(p) - \frac{R + L p}{K^2(1 + T_m p + T_e T_m p^2)} C_r(p)$$

2. Réponse indicielle

On étudie, tout d'abord, les pôles de la FT (donc les zéros) de leur polynôme caractéristique $D(p)$, dénominateur de la FT.

Caractéristiques des pôles d'une FT d'un second ordre :

$$D(p) = 1 + \frac{2\zeta}{\omega_n} p + \frac{p^2}{\omega_n^2} = 0 \rightarrow \Delta' = \frac{\zeta^2}{\omega_n^2} - \frac{1}{\omega_n^2} = \frac{\zeta^2 - 1}{\omega_n^2}$$



$$\zeta^2 - 1 > 0 \quad (\zeta > 1)$$

$$\zeta^2 - 1 = 0 \quad (\zeta = 1)$$

$$\zeta^2 - 1 < 0 \quad (\zeta < 1)$$

Cas où $\zeta > 1$: Régime apériodique sans dépassement :

Voir les exercices et les simulations sur gnuplot

Dans un moteur électrique supportant une inertie importante, $T_e \ll T_m$, de sorte que l'on peut écrire :

$$\Omega(p) = \frac{1}{K(1 + T_m p)(1 + T_e p)} U(p) - \frac{R + Lp}{K^2(1 + T_m p)(1 + T_e p)} C_r(p)$$

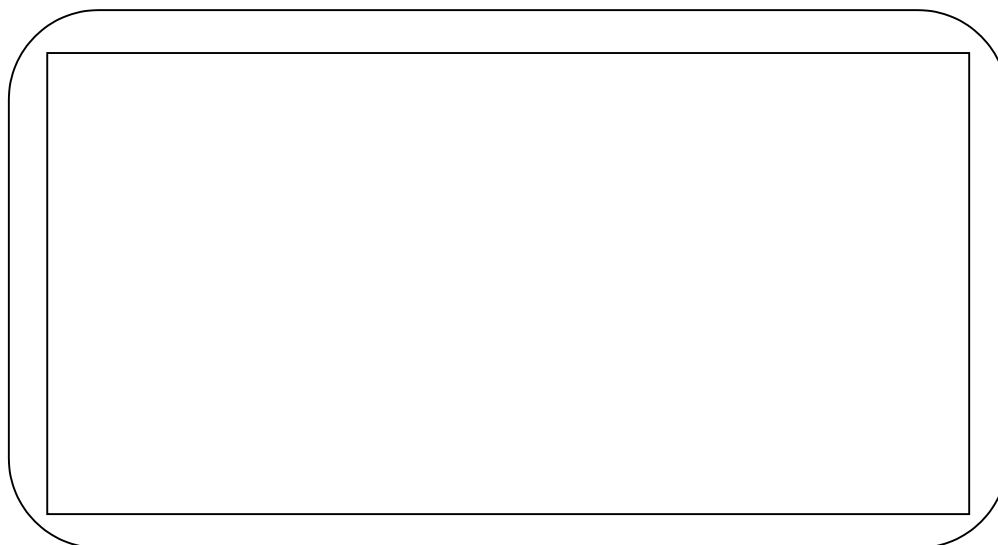
Cas où $\zeta = 1$: Régime apériodique critique

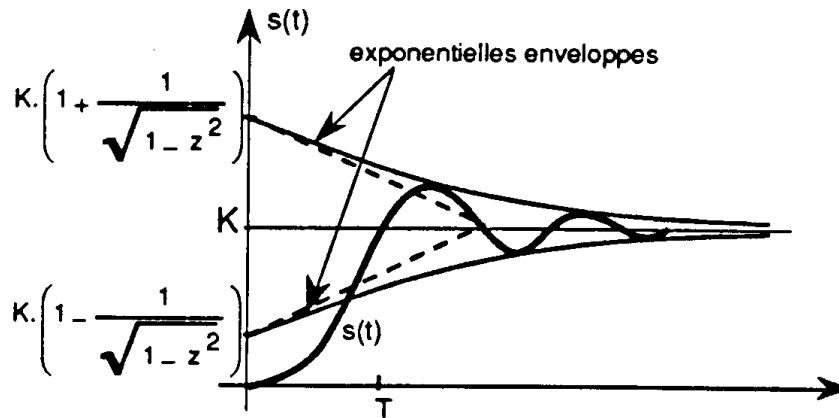
C'est le régime apériodique le plus rapide, il correspond à l'amortissement critique.

Voir les exercices et les simulations sur gnuplot

Cas où $\zeta < 1$: Régime oscillatoire avec dépassement

Voir les exercices et les simulations sur gnuplot





3. Réponse à une rampe ou à un échelon de vitesse

$$e(t) = V t u(t) \text{ soit } E(p) = \frac{V}{p^2} \rightarrow$$

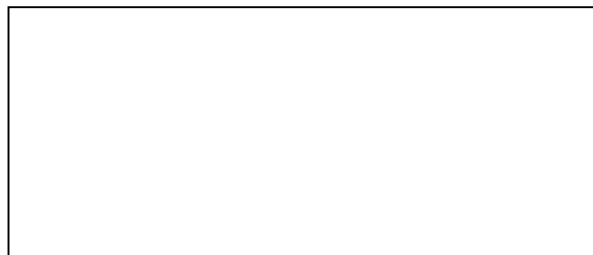
$$S(p) = H(p) E(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\zeta}{\omega_n} p + \frac{p^2}{\omega_n^2}} \cdot \frac{V}{p^2} = K V \left(\frac{\alpha}{p^2} + \frac{\beta}{p} + \frac{\gamma p + \delta}{1 + \frac{2\zeta}{\omega_n} p + \frac{p^2}{\omega_n^2}} \right)$$

L'identification nous donnera :

$$\alpha = 1 ; \beta = -\frac{2\zeta}{\omega_n} ; \gamma = \frac{2\zeta}{\omega_n} ; \delta = 4(\zeta^2 - 1)$$

$$\text{d'où } s(t) = K V \left(t - \frac{2\zeta}{\omega_n} + S_1(t) \right) u(t)$$

4. réponse harmonique



$$A(\omega) = |H(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

$$\Phi(\omega) = \text{Arg } H(j\omega) = -\text{Arc tan } \frac{2\zeta \omega \omega_n}{\omega_n^2 - \omega^2}$$

5. Lieux de transfert d'un second ordre :

Phase

$$u = \frac{2\zeta \omega \omega_n}{\omega_n^2 - \omega^2}, \text{ On aura donc } \Phi(\omega) = -\text{Arctan } u \text{ qui décroît de } 0 \text{ à } 180^\circ \text{ avec}$$

$$\Phi(0) = 0$$

$$\Phi(\omega_n) = -90^\circ$$

$$\Phi(\omega \rightarrow \infty) = -180^\circ$$

Etude de l'amplitude

On calcule deux choses :

ω_R : pulsation de résonance

Q : coefficient de surtension

L'amplitude $A(\omega)$ admet un maximum pour une pulsation caractéristique : c'est la résonance du système ω_R et la valeur de ce maximum correspond à Q .

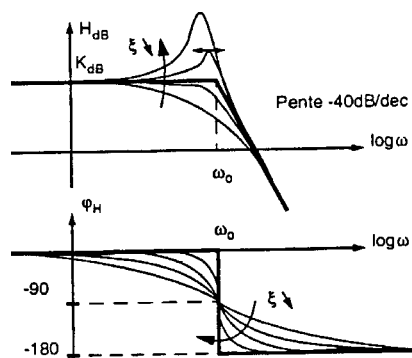
$$Q = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} \text{ pour}$$

$$\omega = \omega_R = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}$$

$A(\omega)$ présente un maximum



Diagramme de Bode : Voir les exercices et les simulations sur gnuplot



Etude des asymptotes

$$A_{db} = 20 \log K - 20 \log \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(\frac{2\zeta\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

Si ω est petit, $A_{db} = 20 \log K$. Cette 1^{ère} asymptote est une horizontale d'ordonnée A_{db} .

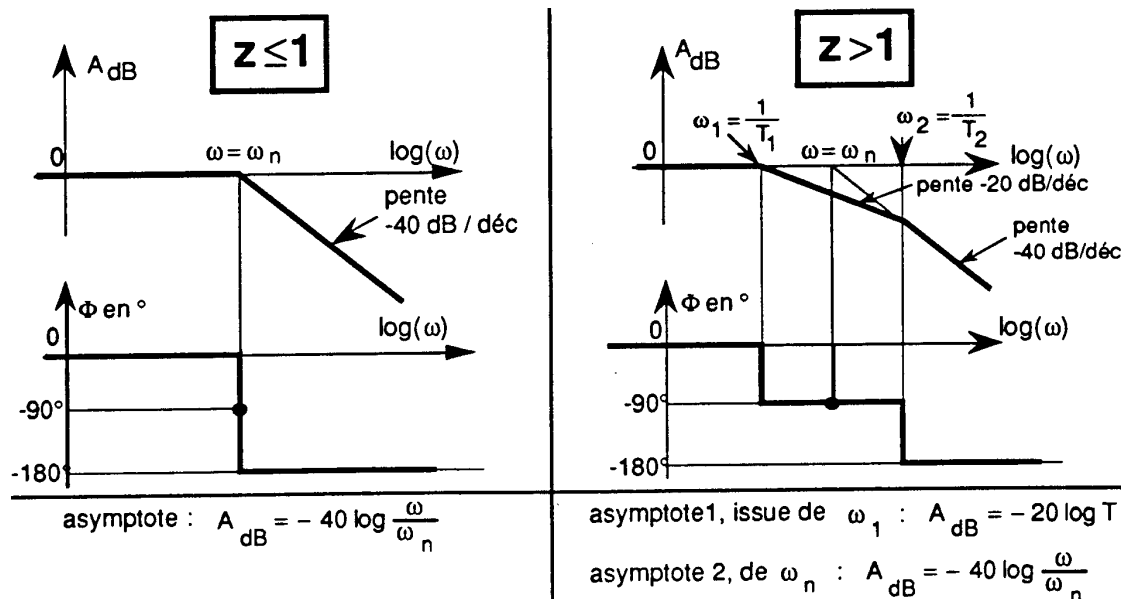
Si ω est grand, $A_{db} \approx 20 \log K - 20 \log \sqrt{\left(\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2} = 20 \log K + \log \omega_0^2 - 40 \log \omega$. Il s'agit bien d'une asymptote oblique de pente - 40 db / décade.

On peut noter, que pour $\zeta = 0,7$, on peut faire l'approximation de la courbe de gain par le diagramme asymptotique

Que se passe-t-il à la fréquence de cassure (ou de coupure) ? $\omega_c = \omega_n$



On notera $A_{db} \rightarrow \infty$ quand $\zeta \rightarrow 0$ et que l'écart à l'asymptote est de - 6 db pour $\zeta = 1$



Rappels :

Pour $\zeta < 0.7$, la valeur de l'amplitude $A(\omega)$ admet un maximum (sa dérivée s'annule) appelé RESONANCE. La pulsation correspondante est appelée pulsation de résonance.

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}$$

et l'amplitude maxi est de

$$A(\omega_r) = \frac{K}{2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2}}$$

Plus ζ est petit, plus l'amplitude de résonance est grande. C'est le facteur de surtension Q (ou facteur de résonance) qui est le rapport entre l'amplitude de résonance et l'amplitude en régime statique :



Application : Tracer les courbes de bode, de Nyquist et de Black pour l'exemple suivant.



Le gain statique est non-unitaire

La pulsation propre $\omega_n = 10 \text{ rad/s}$

Le coeff. d'amortissement $\zeta = 0.43$

Gain à basse fréquence $A_{db} = 20 \log K = 20 \log 10 = 20 \text{ db}$

Déphasage de -90° pour $\omega_n = 10 \text{ rad/s}$

$\zeta < 0.7$: système possédant une résonance en $\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2} = 10\sqrt{1 - 2(0.43)^2} = 7.9 \text{ rad/s}$

Amplitude de résonance : $A(\omega_r) = \frac{K}{2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2}} = \frac{10}{0.86 \sqrt{1 - (0.43)^2}} = 12.87 \rightarrow A_{db} = 22.19 \text{ db}$

Déphasage à la résonance : $\Phi(\omega_r) = -\text{Arctan}\left(\frac{2\zeta \sqrt{1 - 2\zeta^2}}{1 - (1 - 2\zeta^2)}\right) = -\text{Arctan}\left(\frac{\sqrt{1 - 2\zeta^2}}{\zeta}\right) = -61.55^\circ$

Coefficient de surtension : $Q = \frac{1}{2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2}} = \frac{1}{0.86 \sqrt{1 - (0.43)^2}} = 1.28$

FREQUENCES REMARQUABLES.

Les systèmes du second ordre possèdent plusieurs fréquences remarquables qui ne sont pas toujours notées de la même manière par les différents auteurs. Il s'agit donc de bien les différencier pour pouvoir les reconnaître.

ω_n : pulsation (ou fréquence) propre non amortie. C'est la fréquence à laquelle le système oscillerait si le coefficient d'amortissement ζ était nul (système non amorti). C'est également la fréquence de cassure sur le diagramme asymptotique de Bode, fréquence pour laquelle le déphasage est de -90° .

ω_p : pulsation (ou fréquence) propre. C'est la fréquence des oscillations transitoires de la réponse indicielle. Elle dépend de ζ : $\omega_p = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$

ω_r : pulsation (ou fréquence) de résonance. C'est la fréquence pour laquelle le module de la fonction de transfert harmonique est maximal. Elle dépend aussi de ζ et n'existe que si $\zeta < 0.7$.

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}$$

ω_c : Pulsation (ou fréquence) de coupure à 3 dB. C'est la fréquence pour laquelle la réponse harmonique du système est atténuée de 3dB. Une atténuation de 3dB correspond à une atténuation du signal de sortie de 30% . On rencontre aussi la fréquence de coupure à 6dB (atténuation de 50%).

Un système du second ordre est un filtre passe-bas.

La rapidité et la bande passante évoluent dans le même sens.

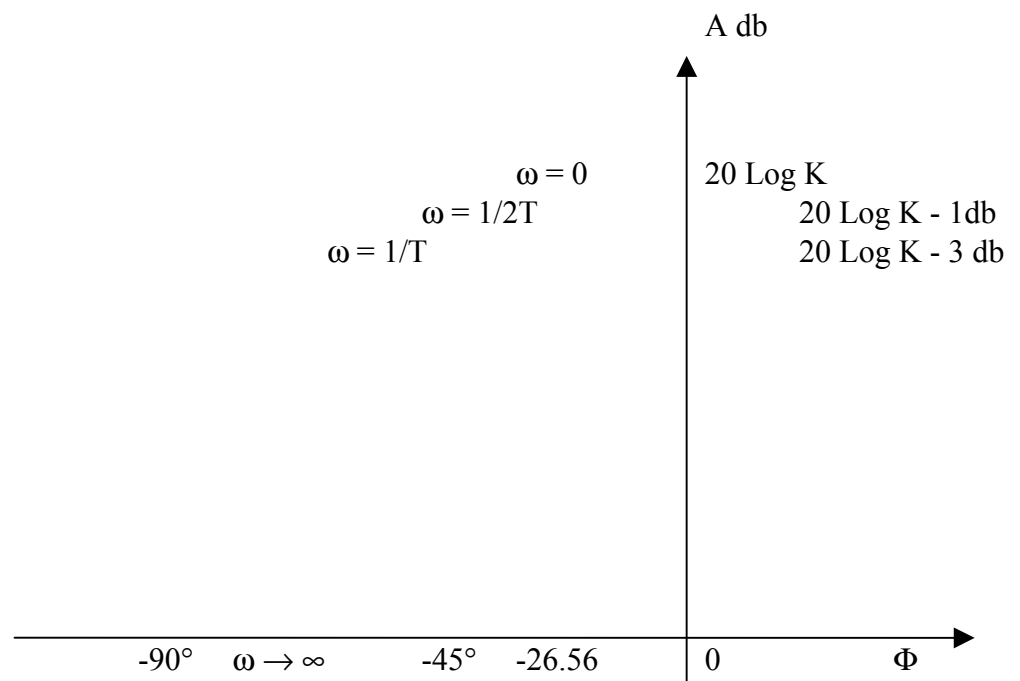
La rapidité et la fréquence de résonance évoluent dans le même sens.

Les termes du dénominateur sont > 0 , les racines < 0 , c'est un 1^{er} critère de stabilité du système

Diagramme de Black :

Sachant que $A \text{ db} = 20 \log \left(\frac{K}{\sqrt{1 + T^2 \omega^2}} \right)$ et que $\Phi = \text{Arctan} (-T \omega)$

Pulsation	Amplitude A db	Phase Φ
$\omega = 0$	$20 \text{ Log } K$	0
$\omega = \frac{1}{2T}$	$20 \text{ Log } K - 1 \text{ db}$	-26.56°
$\omega = \frac{1}{T}$	$20 \text{ Log } K - 3 \text{ db}$	$-45^\circ ; \left(-\frac{\pi}{4}\right)$
$\omega \rightarrow \infty$	$-\infty$	$-90^\circ ; \left(-\frac{\pi}{2}\right)$



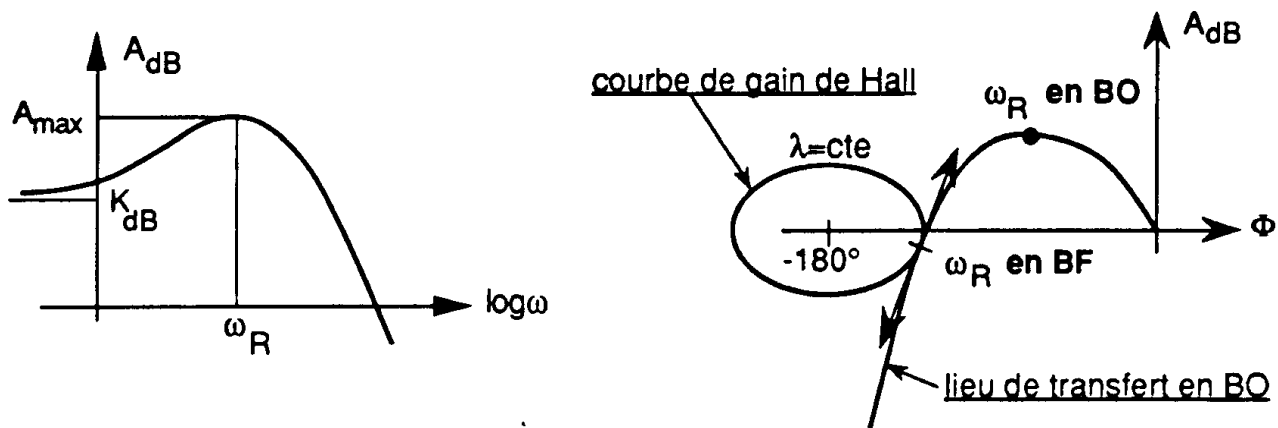
Autre Exemple :

Si un système possède une FTBO tel que M (2 db ; -120 °) et N (- 10 db ; -40 °), et que le retour soit unitaire, sa FTBF passe par les points M1 (0.8 db ; - 50 °) et N1 (- 12 db ; - 30 °)

Voir transparent.

Résonance

Si $A(\omega)$ admet un maximum, on dit que le système présente une résonance



Le phénomène de résonance est d'une très grande importance en physique où il peut:

-soit être utile et recherché (résonateurs, antennes, circuits oscillants,...);

- soit au contraire être nuisible et évité (notamment en construction mécanique: exemple de destruction d'hélicoptère au décollage ou à l'atterrissage, par résonance de la structure induite par un couplage résonant entre les pales et le sol par l'intermédiaire du train d'atterrissage: un tel accident, rare, est survenu en juin 89 et a fait les manchettes des journaux).

On définit pour la pulsation de résonance ω_R , un coefficient de surtension, noté Q , égal au rapport de l'amplitude de résonance $A(\omega_R)$ sur l'amplitude statique $A(0)$, coefficient souvent exprimé en décibels:

$$Q \text{ db} = 20 \log \frac{|H(j\omega)|}{|H(0)|}$$

L'abaque de Hall, voir la figure ci-dessus à droite, permet la détermination du lieu de transfert en BF à partir du simple tracé du lieu de transfert en BO. Il est alors facile de déterminer la pulsation et le gain de résonance pour la FTBF. En effet les contours de Hall, transformées inverses des lignes de gain constant en BF sont des courbes entourant le point $(-180^\circ, 0 \text{ dB})$ (point dit critique), et se rapprochant de ce point pour des gains croissant. Par ailleurs les caractéristiques en BF pour une pulsation ω donnée se déduisent des courbes de Hall passant par le point caractéristique de la FTBO pour cette pulsation ω .

Il en résulte que le maximum de gain est obtenu pour le point caractéristique de la FTBO tangent à un contour de Hall.

Cette propriété sera exploitée lors de la synthèse des commandes ou pour déterminer le comportement de la réponse en BF. Noter la position du contour de Hall à 0 dB caractérisant les systèmes non résonants.