posons : $\left\{ \mathcal{V}(S2/S1) \right\} = \left\{ \mathcal{V} \right\}$

et dans la base ($\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$) :

$$\vec{\Omega}(S2/S1) = \alpha\vec{x} + \beta\vec{y} + \gamma\vec{z}$$

$$\vec{V}(O \in S2/S1) = u\,\vec{x} + v\vec{y} + w\vec{z}$$

Alors :

$$\left\{ \mathcal{V} \right\} = {}_{O}\begin{Bmatrix} \alpha & u \\ \beta & v \\ \gamma & w \end{Bmatrix}$$

Définitions

- { τ } est le torseur statique de la liaison équivalente.
- { $\mathcal{V}$ } est le torseur cinématique de la liaison équivalente.

Suivant la nature des liaisons et la façon dont elles sont associées, nous allons déterminer dans les paragraphes qui suivent les caractéristiques de la liaison équivalente.

5 LIAISONS EN PARALLÈLE

5.1. DÉFINITION

n liaisons (L1), (L2), ..., (Li), ..., (Ln) sont disposées en parallèle entre deux solides (S1) et (S2) si chaque liaison relie directement ces deux solides.

Le graphe des liaisons se trace ainsi :

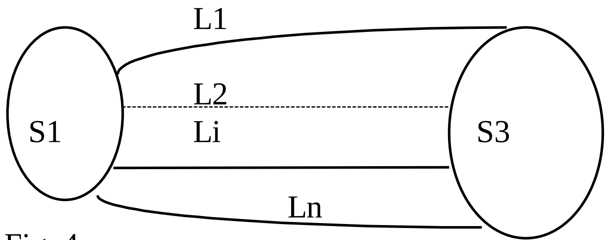


Fig. 4

5.2. LIAISON ÉQUIVALENTE

5.2.1. Torseur statique

Pour déterminer les caractéristiques du torseur statique de la liaison équivalente appliquons à (S2) le principe fondamental de la statique.
Supposons qu'en plus de l'action mécanique de (S1) sur (S2) à travers les n liaisons en parallèle, s'exerce sur (S2) une action mécanique représentée par le torseur $\{\tau_0\}$. Le principe fondamental de la statique appliqué à (S2) s'écrit :

$$\sum_{i=1}^{n} \{\tau_i\} + \{\tau_0\} = \{\vec{0}\} \qquad (1)$$

En écrivant le principe fondamental avec le torseur statique de la liaison équivalente, on obtient :

$$\{\tau\} + \{\tau_0\} = \{\vec{0}\} \qquad (2)$$

En comparant les relations (1) et (2) on trouve l'expression du torseur statique de la liaison équivalente en fonction des torseurs statiques des n liaisons en parallèle :

$$\{\tau\} = \sum_{i=1}^{n} \{\tau_i\} \qquad (3)$$

Par conséquent : pour qu'une composante du torseur statique de la liaison équivalente ne soit pas nulle, il suffit qu'une seule composante correspondante d'une liaison (Li) ne soit pas nulle.
Les composantes d'action mécanique transmissibles entre (S1) et (S2) sont celles qui sont transmissibles par les liaisons (Li).

5.2.2. Torseur Cinématique

La connaissance du torseur statique de la liaison équivalente entraîne la connaissance du torseur cinématique, comme nous l'avons signalé au paragraphe 4.

Pour l'obtenir directement, il suffit d'écrire que le torseur cinématique de la liaison équivalente doit être compatible avec tous les torseurs cinématiques des liaisons (Li). Soit

$$\{ \mathcal{V} \} = \{ \mathcal{V}\mathbf{i} \}, \forall \, i$$

ou bien :

$$\{ \mathcal{V} \} = \{ \mathcal{V}1 \} = \{ \mathcal{V}2 \} = ... = \{ \mathcal{V}n \} \qquad (4)$$

Par exemple, supposons qu'il y ait entre les deux solides (S1) et (S2) les deux liaisons en parallèle suivantes :
(L1) : liaison pivot glissant d'axe (O, $\vec{x}$)
(L2) : liaison ponctuelle de normale (O, $\vec{x}$).

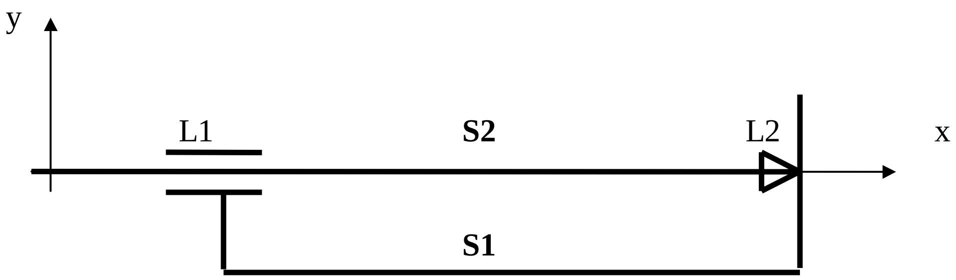


figure 4 bis

Les torseurs cinématiques de ces deux liaisons s'écrivent au point O, dans la base de R :

$$\{ \mathcal{V}1 \} = {}_{O}\begin{Bmatrix} \alpha 1 & u1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix} \qquad \{ \mathcal{V}2 \} = {}_{O}\begin{Bmatrix} \alpha 2 & 0 \\ \beta 2 & v2 \\ \gamma 2 & w2 \end{Bmatrix}$$

les composantes α, β, γ, u, v et w du torseur cinématique de la liaison équivalente doivent vérifier les équations suivantes, déduites de la relation (4) :

$\alpha = \alpha 1 = \alpha 2$
$\beta = 0 = \beta 2$
$\gamma = 0 = \gamma 2$
$u = u1 = 0$
$v = 0 = v2$
$w = 0 = w2$

Par suite, le torseur cinématique de la liaison équivalente s'écrit :

$$\{\mathcal{V}\} = \begin{Bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_O$$

torseur qui correspond à une liaison pivot d'axe (O, $\vec{x}$).

__5.2.3. Hyperstatisme et mobilité__

Le nombre total d'inconnues statiques introduit par les n liaisons en parallèle est :

$$Ns = \sum_{i=1}^{n} nsi$$

L'écriture de la relation (3) donne six équations scalaires pour déterminer les Ns inconnues statiques en fonction des composantes X, Y, Z. L. M, N du torseur statique de la liaison équivalente.

Soit rs le nombre d'équations scalaires indépendantes $(rs \leq 6)$.

Définitions

Le degré d'hyperstatisme h de la liaison équivalente aux n liaisons en parallèle est égal au nombre total Ns d'inconnues statiques introduit par les liaisons, moins le nombre rs de relations indépendantes entre ces inconnues.

Soit : h = Ns - rs

Lorsque h = 0 la liaison équivalente est dite isostatique.

Lorsque h > 0 la liaison équivalente est dite hyperstatique d'ordre h.

Les h inconnues statiques qui ne peuvent pas être calculées en fonction des composantes X, Y, Z, L, M, N du torseur statique de la liaison équivalente sont appelées inconnues hyperstatiques.

Définitions

Le degré de mobilité m de la liaison équivalente aux n liaisons en parallèle est égal à 6 (nombre de degrés de liberté de la liaison libre) moins le nombre rs de relations de nullité indépendantes imposées aux composantes du torseur cinématique de la liaison équivalente.

Soit : m = 6 - rs

Lorsque m = 0 la liaison équivalente est dite complète ou rigide.

Lorsque m > 0 la liaison équivalente est dite mobile à m degrés de liberté.

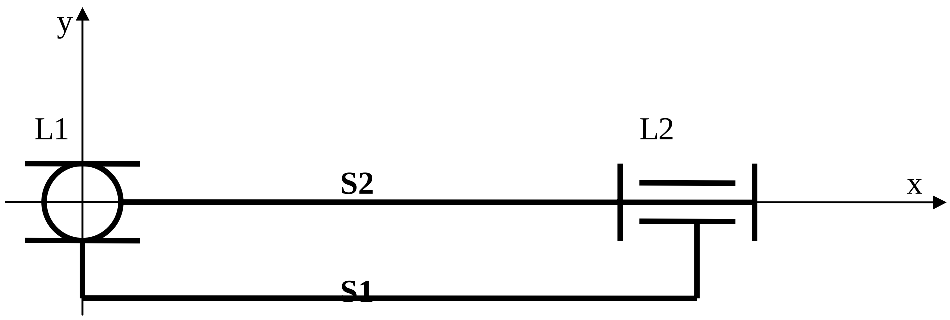
5.3. APPLICATIONS

Application 1

Considérons un arbre (S2). d'axe (O, $\vec{x}$) monté dans un bâti (S1) par l'intermédiaire de deux liaisons (LI) et (L2).

La liaison (L1) est une liaison linéique annulaire d'axe (O, $\vec{x}$), de centre O.

La liaison (L2) est une liaison pivot d'axe (O, $\vec{x}$).



QUESTION 1

Déterminer le torseur statique de la liaison équivalente aux deux liaisons en parallèle (L1) et (L2).

RÉPONSE

Soit R(O, $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$) un repère lié à (S2). Les torseurs statiques des liaisons (L1) et (L2) ont au point O, dans la base de R. Leur forme particulière conservée.

Posons

$$\{\Im\ 1\} = {}_{O}\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y1 & 0 \\ Z1 & 0 \end{Bmatrix}$$

QUESTION 2

Déterminer le degré d'hyperstatisme de la liaison équivalente ainsi que les inconnues hyperstatiques

RÉPONSE

Le degré d'hyperstatisme de la liaison équivalente est :$h = Ns - rs$

QUESTION 3

Par une étude cinématique, déterminer le torseur cinématique de la liaison équivalente aux deux liaisons (L1) et L2).

RÉPONSE

Les torseurs cinématiques des liaisons (L1) et (L2) s'écrivent au point O. dans la hase de R :