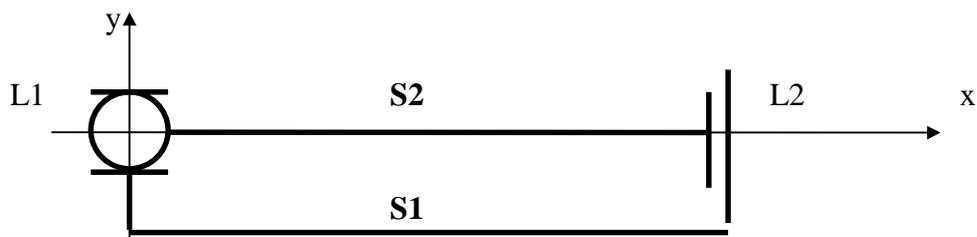


#### QUESTION 4

Pour que la liaison équivalente aux deux liaisons (L1) et (L2) soit une liaison pivot isostatique d'axe  $(O, \vec{x})$ , proposer plusieurs modifications possibles de la liaison (L2), la liaison (L1) restant inchangée.

#### RÉPONSE

La liaison équivalente conservant le même degré de mobilité  $m = 6 - r_s = 1$ , on en déduit que  $r_s = 5$ .



Les torseurs statiques des liaisons (L1) et (L2) précédents ont leur forme particulière conservée au même point O et dans la même base de R.

Pour obtenir une autre construction isostatique il faut chercher une liaison (L2) dont le torseur statique a sa forme particulière en un autre point que le point O.

Envisageons de placer en un point A de l'axe  $(O, \vec{x})$  une liaison rotule de centre A. Le torseur statique correspondant est :

$$\{S_2\} = \begin{Bmatrix} X_2 & 0 \\ Y_2 & 0 \\ Z_2 & 0 \end{Bmatrix}_A$$

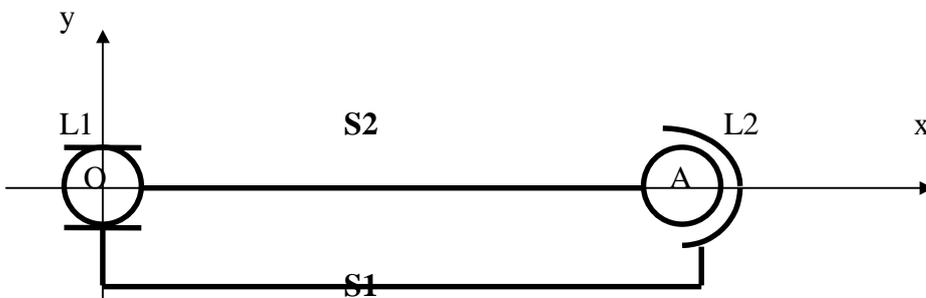
posons :

$$\vec{OA} = l\vec{x} \text{ avec } l \neq 0$$

Pour vérifier que cette solution convient écrivons que :

$$\{S\}_O = \{S_1\}_O + \{S_2\}_O$$

d'où les six équations scalaires :



### **Application 2**

Pour vérifier qu'une liaison entre deux pièces (S<sub>1</sub>) et (S<sub>2</sub>), réalisée par association en parallèle de six liaisons ponctuelles de normales connues, est complète et isostatique, il suffit d'utiliser la méthode définie précédemment.

Cependant dans ce cas fréquemment rencontré. en particulier dans les montages d'usinage. on vérifie pratiquement qu'il en est ainsi à condition :

- qu'il n'y ait pas plus de trois normales parallèles,
- qu'il n'y ait pas plus de trois normales dans un même plan. ces trois normales étant, ni concourantes en un même point, ni parallèles.
- qu'il n'y ait pas plus de trois normales non coplanaires concourantes en un même point.
- que les six normales soient disposées dans 3 directions différentes.

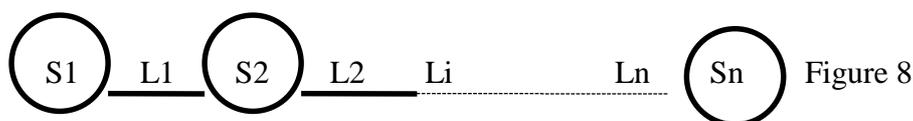
## 6. LIAISONS EN SERIE

### 6.1. DÉFINITION

$n$  liaisons  $(L1), (L2), \dots, (Li), \dots, (Ln)$  sont en série entre deux solides  $(S_0)$  et  $(S_n)$  si elles sont disposées à la suite l'une de l'autre par l'intermédiaire de  $(n-1)$  solides.

Le graphe des liaisons se trace ainsi (figure 8) :

On dit également que les  $(n + 1)$  solides assemblés par les  $n$  liaisons en série constituent une chaîne continue ouverte.



### 6.2. LIAISON ÉQUIVALENTE

#### 62.1. Torseur statique

Le torseur statique  $\{S_i\}$  de la liaison  $(L_i)$  représente dans cette étude l'action mécanique du solide  $(S_{i-1})$  sur le solide  $(S_i)$ . Le torseur statique  $\{S\}$  de la liaison équivalente représente l'action mécanique équivalente du solide  $(S_0)$  sur le solide  $(S_n)$ .

Supposons qu'en plus des actions mécaniques dans les liaisons entre les différents solides, s'exerce sur le solide  $(S_0)$  une action mécanique représentée par le torseur  $\{S_0\}$ .

Le principe fondamental de la statique appliqué à  $(S_0)$  s'écrit :

$$\{S_0\} - \{S_1\} = \{\vec{0}\}$$

à l'ensemble  $\{(S_0), (S_1)\}$  :

$$\{S_0\} - \{S_2\} = \{\vec{0}\}$$

à l'ensemble  $\{(S_0), (S_1), (S_2)\}$  :

$$\{\mathcal{S}_0\} - \{\mathcal{S}_3\} = \{\vec{0}\}$$

et ainsi de suite jusqu'à l'ensemble  $\{(S_0), (S_1), \dots, (S_{n-1})\}$  ]

$$\{\mathcal{S}_0\} - \{\mathcal{S}_n\} = \{\vec{0}\}$$

En écrivant le principe fondamental, appliqué à  $(S_0)$ , avec le torseur statique de la liaison équivalente de l'action mécanique de  $(S_0)$  sur  $(S_n)$ , on obtient :  $\{\mathcal{S}_0\} - \{\mathcal{S}\} = \{\vec{0}\}$

En comparant toutes ces relations on en déduit que le torseur statique de la liaison équivalente doit vérifier :

$$\{\mathcal{S}\} = \{\mathcal{S}_1\} = \{\mathcal{S}_2\} = \dots = \{\mathcal{S}_n\} \quad (5)$$

Par conséquent, si une composante d'un torseur statique d'une liaison  $(L_i)$  est nulle, la composante correspondante du torseur statique de la liaison équivalente est nulle. Les composantes d'action mécanique transmissibles entre  $(S_0)$  et  $(S_n)$  sont donc celles qui sont transmissibles simultanément par les liaisons  $(L_i)$ .

### 6.2.2. Torseur cinématique

Le torseur cinématique  $\{\mathcal{V}_i\}$  de la liaison  $(L_i)$  représente dans cette étude le mouvement du solide  $(S_i)$  par rapport au solide  $(S_{i-1})$ . Le torseur cinématique  $\{\mathcal{V}\}$  de la liaison équivalente représente le mouvement du solide  $(S_n)$  par rapport au solide  $(S_0)$ .

La relation entre le torseur  $\{\mathcal{V}\}$  et les torseurs  $\{\mathcal{V}_i\}$  s'obtient en écrivant la relation de composition des torseurs cinématiques entre les différents solides en présence :

$$\{\mathcal{V}(S_n/S_0)\} = \{\mathcal{V}(S_n/S_{n-1})\} + \dots + \{\mathcal{V}(S_1/S_0)\}$$

soit avec les notations utilisées :

$$\{\mathcal{V}\} = \sum_{i=1}^n \{\mathcal{V}_i\}$$

Par suite, les composantes de mouvement existant entre  $(S_0)$  et  $(S_n)$  sont toutes celles des liaisons  $(L_i)$ .

### 6.2.3. Hyperstatisme et mobilité

L'écriture de la relation (5) :

$$\{\mathcal{S}\} = \{\mathcal{S} 1\} = \{\mathcal{S} 2\} = \dots = \{\mathcal{S} n\}$$

permet la détermination de toutes les composantes  $X_i, Y_i, Z_i, L_i, M_i, N_i$  des torseurs statiques  $\{\mathcal{S} i\}$  en fonction des composantes  $X, Y, Z, L, M, N$  du torseur statique  $\{\mathcal{S}\}$  de la liaison équivalente.

Par conséquent, la liaison équivalente aux  $n$  liaisons en série entre  $(S_0)$  et  $(S_n)$  est toujours isostatique

#### **Définition**

Le degré de mobilité  $m_u$  de la liaison équivalente aux  $n$  liaisons en série entre  $(S_0)$  et  $(S_n)$  est égal au nombre d'inconnues cinématiques indépendantes du torseur cinématique de la liaison équivalente.

$m_u$  est aussi appelé degré de mobilité utile de la chaîne continue ouverte.

Le nombre total d'inconnues cinématiques introduit par les  $n$  liaisons en série est :

$$N_c = \sum_{i=1}^n n c_i$$

#### **Définition**

Le degré de mobilité  $m$  de la chaîne continue ouverte comprenant  $n$  liaisons est égal au nombre  $N_c$  d'inconnues cinématiques introduit par les  $n$  liaisons.

Soit  $m = N_c$

Comme l'introduction successive de solides intermédiaires entre  $(S_0)$  et  $(S_n)$  ne peut qu'augmenter le degré de mobilité de la chaîne continue ouverte, on a toujours :  $m \geq m_u$

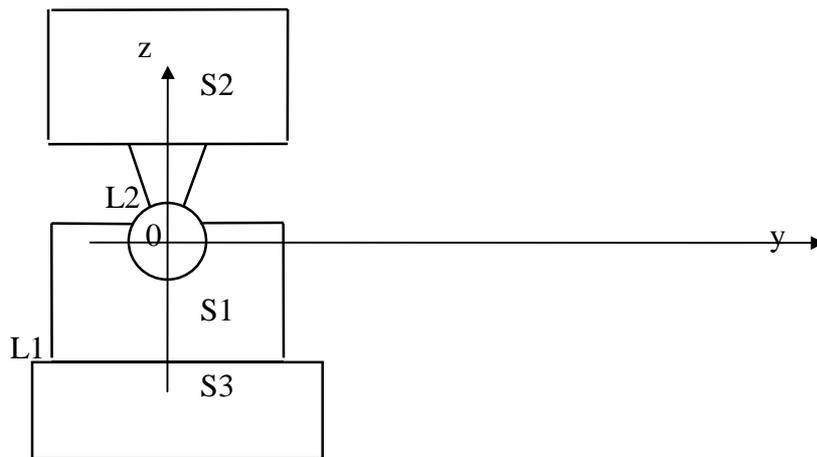
Posons alors :  $m = m_u + m_i$

$m_i$  est appelé degré de mobilité interne de la chaîne continue ouverte.

Une pièce a une mobilité interne dans un mécanisme (par exemple, une bielle tournant sur elle-même entre deux liaisons rotule) si elle peut avoir un mouvement qui n'entraîne aucun mouvement des autres pièces du mécanisme.

### 6.2.4. Application

Soit une chaîne continue ouverte constituée par trois solides  $(S_0), (S_1)$  et  $(S_2)$ .



La liaison (L2) entre (S1) et (S2) est une liaison rotule de centre O.

La liaison (L1) entre (S0) et (S1) est une liaison appui plan de normale  $(O, \vec{z})$ .

Soit  $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  un repère situé sur les liaisons.

### **QUESTION 1**

Déterminer le torseur statique de la liaison équivalente aux deux liaisons en série entre (S0) et (S2).

### **RÉPONSE**

Au point O, dans la base de R, les torseurs statiques des liaisons (L1) et (L2) sont de la forme :

***QUESTION 2***

Par une étude cinématique, déterminer le torseur cinématique de la liaison équivalente aux deux liaisons en série entre (S0) et (S2). En déduire le degré de mobilité interne de la chaîne continue ouverte constituée par (S0), (S1) et (S2).

***RÉPONSE***

### **7 AVANTAGES ET INCONVENIENTS D'UN MECANISME ISOSTATIQUE PAR RAPPORT A UN MECANISME HYPERSTATIQUE**

Dans un mécanisme isostatique, l'absence d'inconnues hyperstatiques indique que la position relative des liaisons n'a pas besoin d'être aussi précise que dans un mécanisme hyperstatique.

D'où :

a) Une facilité de fabrication plus grande par l'absence de tolérances de position réduites à respecter (parallélisme, perpendicularité, coaxialité. . . ). Notons que cette facilité de fabrication est en partie compensée par une complexité plus grande du mécanisme.

Complexité généralement due à l'introduction de pièces intermédiaires en série dans les liaisons pour augmenter leur nombre de degrés de liberté.

b) Une assurance que les surfaces de liaison sont bien en contact. Par conséquent, une construction isostatique réalise une mise en position précise d'une pièce par rapport à une autre.

c) Une connaissance exacte du torseur statique de chaque liaison, qui permet une évaluation correcte des pressions entre les surfaces en contact.