Pour maîtriser le comportement d'un mécanisme (afin, par exemple, d'obtenir une précision voulue de mise en position d'une pièce par rapport à une autre, ou d'éviter une usure prématurée, un coincement, ou un montage impossible) il faut connaître précisément la position relative de chaque liaison, ainsi que les torseurs d'action mécanique correspondants.

L'objectif de ce chapitre est donc :

- de localiser, quand elles existent, les inconnues de liaison (inconnues hyperstatiques) que l'on ne peut pas déterminer uniquement par application du principe fondamental de la statique (ou de la dynamique) à ce mécanisme,
- de proposer, éventuellement, des modifications pour rendre le mécanisme isostatique (sans inconnue hyperstatique),
- de savoir à quelles conditions géométriques de position relative des liaisons correspondent les inconnues hyperstatiques.

1 . HYPOTHÈSES DE L'ETUDE

Les résultats que nous allons mettre en place seront valables pour :

des pièces modélisées par des solides indéformables,

- des liaisons sans frottement,
- des liaisons à contact bilatéral, c'est-à-dire des liaisons dans lesquelles le contact est supposé maintenu si le sens des actions mécaniques est inversé. Cette hypothèse concerne essentiellement les liaisons ponctuelle, linéique rectiligne et appui plan.

De plus, pour simplifier l'étude, nous supposerons que toutes les pièces sont de masse nulle, de façon que, les effets d'inertie étant nuls, on puisse écrire pour tout sous-ensemble (e) de pièces d'un mécanisme :

$$\left\{\Im\left(\bar{e} \longrightarrow e\right)\right\} = \left\{\vec{0}\right\}$$

2. GRAPHE DES LIAISONS D'UN MÉCANISME

Dans le graphe des liaisons d'un mécanisme les solides sont schématisés par des cercles et les

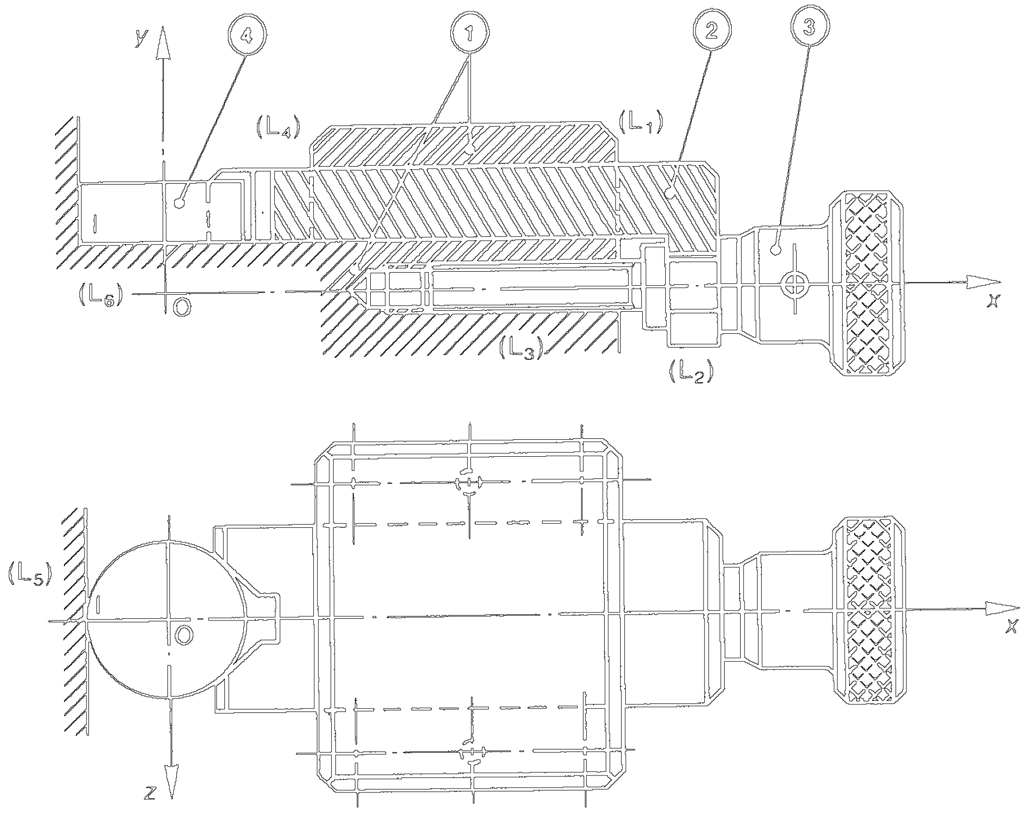
liaisons par des arcs de courbe joignant ces cercles.

Application

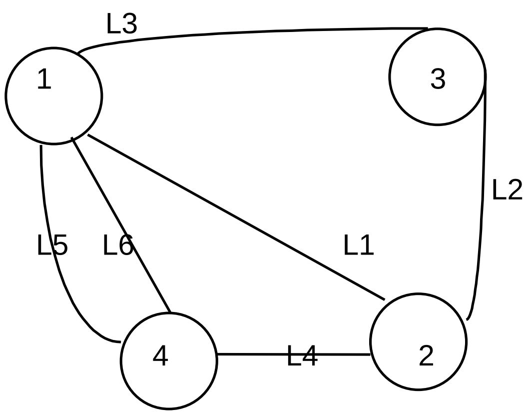
Dans le montage d'usinage représenté figure 1, on vous demande de nommer les liaisons entre les différents solides :

(L1) :
(L2) :
(L3) :
(L4) :
(L5) :
(L6) :

Figure 1 :



Le graphe des liaisons de ce mécanisme faisant apparaître les quatre solides en présence réunis par six liaisons s’établit ainsi :



3 TORSEURS STATIQUE ET CINÉMATIQUE D'UNE LIAISON :

Soit une liaison (Li) entre deux solides (S1) et (S2). Plaçons un repère R(O, $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$) sur la liaison (Li), en tenant compte pour faciliter l'étude de ses éléments de symétrie.

Définissons, au point O, le torseur d'action mécanique du solide (S1) sur le solide (S2) à travers la liaison (Li) :

Dans la base ($\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$) posons :

$$\vec{R}\,(S1 \xrightarrow{Li} S2) = Xi\,\vec{x} + Yi\,\vec{y} + Zi\,\vec{z}$$

$$\vec{M}_o\,(S1 \xrightarrow{Li} S2) = Li\,\vec{x} + Mi\,\vec{y} + Ni\,\vec{z}$$

Et pour simplifier, adoptons l'écriture :

$\{ \Im\,(S1 \xrightarrow{Li} S2)\} = \{ \Im\ i \}$.

Alors :

$$\boxed{\left\{\Im\, i\right\} = {}_O\left\{\begin{matrix} Xi & Li \\ Yi & Mi \\ Zi & Ni \end{matrix}\right\}}$$

Suivant la nature de la liaison (Li) certaines composantes du torseur { $\Im\ i$ } sont nulles ou liées entre elles par des relations. Par exemple, si (Li) est une liaison pivot glissant d'axe (O, $\vec{x}$) : Xi = 0 et Li = 0.

Définitions

- Le torseur {$\Im\ i$} est appelé torseur statique de la liaison (Li).
- Les composantes Xi, Yi, Zi, Li, Mi et Ni non nulles sont appelées inconnues statiques de la liaison (Li).

Notons **ns i** le nombre d'inconnues statiques indépendantes de la liaison (Li).

Définissons, au point O, le torseur cinématique du mouvement de (S1) par rapport à (S2) que la liaison (Li) autorise :

$$[\vec{\mathcal{V}}\,(S2/S1)] = {}_O\begin{cases} \vec{\Omega} i\,(S2/S1) \\ \vec{V} i\,(O \in S2/S1) \end{cases}$$

Dans la base ($\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$) posons : $\vec{\Omega} i\,(S2/S1) = \alpha i\,\vec{x} + \beta i\,\vec{y} + \gamma i\,\vec{z}$

$$\vec{V} i\,(O \in S2/S1) = u_i\,\vec{x} + v_i\vec{y} + w_i\vec{z}$$

Pour simplifier, adoptons l'écriture :

$[\vec{V}(S2/S1)] = [V_i]$

Alors :

$$\boxed{\{V_i\} = \begin{Bmatrix} \alpha i & ui \\ \beta i & vi \\ \gamma i & wi \end{Bmatrix}_O}$$

Suivant la nature de la liaison (Li) certaines composantes du torseur $\{V_i\}$ sont nulles ou liées entre elles par des relations. Par exemple, si (Li) est une liaison pivot glissant d'axe (O, $\vec{x}$) : βi = 0, γi = 0, vi = 0, wi = 0.

Définitions

- Le torseur $\{V_i\}$ est appelé torseur cinématique de la liaison (Li)
- Les composantes αi, βi, γi, ui, vi et wi non nulles sont appelées inconnues cinématiques de la liaison (Li).

Notons **nci** le nombre d'inconnues cinématiques indépendantes de la liaison (Li) :

Connaissant les caractéristiques des torseurs cinématiques et statiques des liaisons, on vérifie facilement qu'il existe entre les nombres **nci** et **nsi** la relation :

nci = 6 - nsi

Par exemple, pour une liaison pivot glissant : **nsi** =4et **nci** = 2

4 LIAISON EQUIVALENTE

Supposons qu'il existe entre deux pièces (S1) et (S2) plusieurs liaisons réalisées avec ou sans pièces intermédiaires

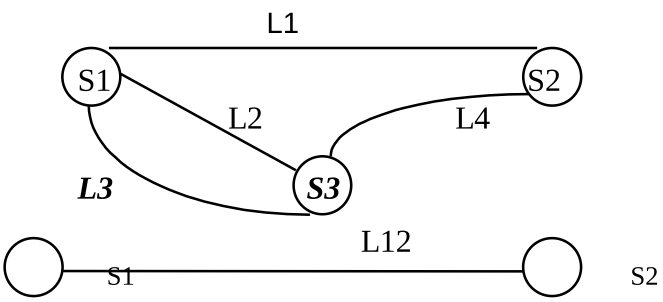


Figure 3

La liaison équivalente à l'ensemble des liaisons situées entre les pièces (S1) et (S2) est la liaison théorique de référence (L12) qui a le même comportement que cette association de liaisons, c'est-à-dire qui transmet la même action mécanique et qui autorise le même mouvement.

Soit R(O, $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$) un repère lié à (S2).

Définissons au point O (choisi en fonction des éléments de symétrie des liaisons pour simplifier les calculs) le torseur d'action mécanique de (S1) sur (S2) de la liaison équivalente :

$$\left\{ \tau\,(S1 \longrightarrow S2) \right\}_O = \begin{Bmatrix} \vec{R}\ (S1 \longrightarrow S2) \\ \vec{M}_O\ (S1 \longrightarrow S2) \end{Bmatrix}$$

Posons :

$$\left\{ \tau\,(S1 \longrightarrow S2) \right\} = \left\{ \tau \right\}$$

et dans la base($\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$) :

$\vec{R}\ (S1 \longrightarrow S2) = X\vec{x} + Y\vec{y} + Z\vec{z}$

$\vec{M}_O\ (S1 \longrightarrow S2) = L\vec{x} + M\vec{y} + N\vec{z}$:

Alors :

$$\left\{ \Im \right\} = {}_O\begin{Bmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}$$

Définissons, au même point O. Le torseur cinématique du mouvement de (S2) par rapport à (S1) de la liaison équivalente : _

$$\left\{ \mathcal{V}\,(S2/S1) \right\} = {}_O\begin{Bmatrix} \vec{\Omega}\,(S2/S1) \\ \vec{V}\,(O \in S2/S1) \end{Bmatrix}$$

posons : $\left\{ \mathcal{V}(S2/S1) \right\} = \left\{ \mathcal{V} \right\}$

et dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$:

$$\vec{\Omega}(S2/S1) = \alpha\vec{x} + \beta\vec{y} + \gamma\vec{z}$$

$$\vec{V}(O \in S2/S1) = u\,\vec{x} + v\vec{y} + w\vec{z}$$

Alors :

$$\left\{ \mathcal{V} \right\} = {}_{O}\begin{Bmatrix} \alpha & u \\ \beta & v \\ \gamma & w \end{Bmatrix}$$

Définitions

- $\{ \tau \}$ est le torseur statique de la liaison équivalente.
- $\{ \mathcal{V} \}$ est le torseur cinématique de la liaison équivalente.

Suivant la nature des liaisons et la façon dont elles sont associées, nous allons déterminer dans les paragraphes qui suivent les caractéristiques de la liaison équivalente.

5 LIAISONS EN PARALLÈLE

5.1. DÉFINITION

n liaisons (L1), (L2), ..., (Li), ..., (Ln) sont disposées en parallèle entre deux solides (S1) et (S2) si chaque liaison relie directement ces deux solides.

Le graphe des liaisons se trace ainsi :

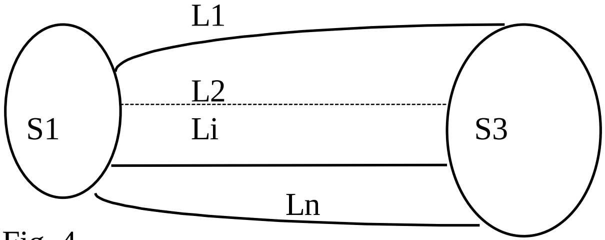


Fig. 4

5.2. LIAISON ÉQUIVALENTE

5.2.1. Torseur statique

Pour déterminer les caractéristiques du torseur statique de la liaison équivalente appliquons à (S2) le principe fondamental de la statique.
Supposons qu'en plus de l'action mécanique de (S1) sur (S2) à travers les n liaisons en parallèle, s'exerce sur (S2) une action mécanique représentée par le torseur $\{\tau_0\}$. Le principe fondamental de la statique appliqué à (S2) s'écrit :

$$\sum_{i=1}^{n} \{\tau_i\} + \{\tau_0\} = \{\vec{0}\} \qquad (1)$$

En écrivant le principe fondamental avec le torseur statique de la liaison équivalente, on obtient :

$$\{\tau\} + \{\tau_0\} = \{\vec{0}\} \qquad (2)$$

En comparant les relations (1) et (2) on trouve l'expression du torseur statique de la liaison équivalente en fonction des torseurs statiques des n liaisons en parallèle :

$$\{\tau\} = \sum_{i=1}^{n} \{\tau_i\} \qquad (3)$$

Par conséquent : pour qu'une composante du torseur statique de la liaison équivalente ne soit pas nulle, il suffit qu'une seule composante correspondante d'une liaison (Li) ne soit pas nulle. Les composantes d'action mécanique transmissibles entre (S1) et (S2) sont celles qui sont transmissibles par les liaisons (Li).

5.2.2. Torseur Cinématique

La connaissance du torseur statique de la liaison équivalente entraîne la connaissance du torseur cinématique, comme nous l'avons signalé au paragraphe 4.
Pour l'obtenir directement, il suffit d'écrire que le torseur cinématique de la liaison équivalente doit être compatible avec tous les torseurs cinématiques des liaisons (Li). Soit

$$\{\mathcal{V}\} = \{\mathcal{V}_i\}, \forall i$$

ou bien :

$$\{\mathcal{V}\} = \{\mathcal{V}_1\} = \{\mathcal{V}_2\} = \ldots = \{\mathcal{V}_n\} \qquad (4)$$

Par exemple, supposons qu'il y ait entre les deux solides (S1) et (S2) les deux liaisons en parallèle suivantes :
(L1) : liaison pivot glissant d'axe (O, $\vec{x}$)
(L2) : liaison ponctuelle de normale (O, $\vec{x}$).

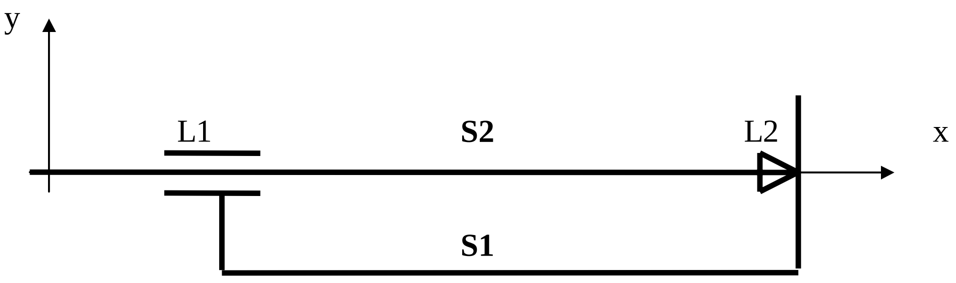


figure 4 bis

Les torseurs cinématiques de ces deux liaisons s'écrivent au point O, dans la base de R :

$$\{\mathcal{V}1\} = {}_O\begin{Bmatrix} \alpha 1 & u1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix} \qquad \{\mathcal{V}2\} = {}_O\begin{Bmatrix} \alpha 2 & 0 \\ \beta 2 & v2 \\ \gamma 2 & w2 \end{Bmatrix}$$

les composantes α, β, γ, u, v et w du torseur cinématique de la liaison équivalente doivent vérifier les équations suivantes, déduites de la relation (4) :

$\alpha = \alpha 1 = \alpha 2$
$\beta = 0 = \beta 2$
$\gamma = 0 = \gamma 2$
u = u1 = 0
v = 0 = v2
w = 0 = w2

Par suite, le torseur cinématique de la liaison équivalente s'écrit :

$$\{\mathcal{V}\} = {}_O\begin{Bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

torseur qui correspond à une liaison pivot d'axe (O, $\vec{x}$).

5.2.3. Hyperstatisme et mobilité

Le nombre total d'inconnues statiques introduit par les n liaisons en parallèle est :

$$Ns = \sum_{i=1}^{n} nsi$$

L’écriture de la relation (3) donne six équations scalaires pour déterminer les Ns inconnues statiques en fonction des composantes X, Y, Z. L. M, N du torseur statique de la liaison équivalente.

Soit rs le nombre d’équations scalaires indépendantes $(rs \leq 6)$.

Définitions

Le degré d’hyperstatisme h de la liaison équivalente aux n liaisons en parallèle est égal au nombre total Ns d’inconnues statiques introduit par les liaisons, moins le nombre rs de relations indépendantes entre ces inconnues.

Soit : h = Ns - rs

Lorsque h = 0 la liaison équivalente est dite isostatique.

Lorsque h > 0 la liaison équivalente est dite hyperstatique d’ordre h.

Les h inconnues statiques qui ne peuvent pas être calculées en fonction des composantes X, Y, Z, L, M, N du torseur statique de la liaison équivalente sont appelées inconnues hyperstatiques.

Définitions

Le degré de mobilité m de la liaison équivalente aux n liaisons en parallèle est égal à 6 (nombre de degrés de liberté de la liaison libre) moins le nombre rs de relations de nullité indépendantes imposées aux composantes du torseur cinématique de la liaison équivalente.

Soit : m = 6 - rs

Lorsque m = 0 la liaison équivalente est dite complète ou rigide.

Lorsque m > 0 la liaison équivalente est dite mobile à m degrés de liberté.

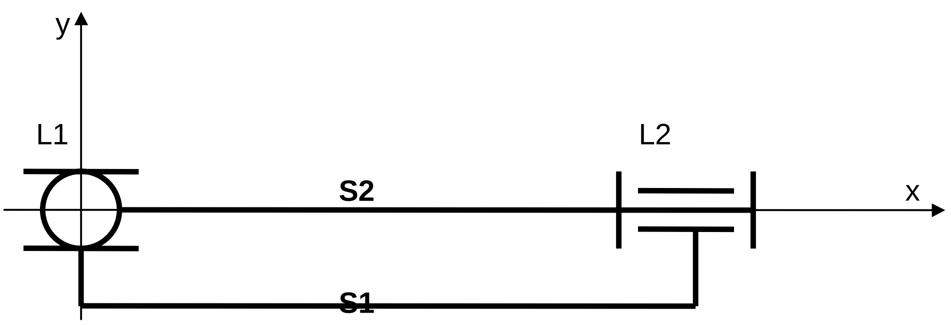
5.3. APPLICATIONS

Application 1

Considérons un arbre (S2). d’axe (O, $\vec{x}$) monté dans un bâti (S1) par l’intermédiaire de deux liaisons (LI) et (L2).

La liaison (L1) est une liaison linéique annulaire d’axe (O, $\vec{x}$), de centre O.

La liaison (L2) est une liaison pivot d’axe (O, $\vec{x}$).



QUESTION 1

Déterminer le torseur statique de la liaison équivalente aux deux liaisons en parallèle (L1) et (L2).

RÉPONSE

Soit R(O, $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$) un repère lié à (S2). Les torseurs statiques des liaisons (L1) et (L2) ont au point O, dans la base de R. Leur forme particulière conservée.

Posons

$$\left\{\Im\, 1\right\} = {}_{O}\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y1 & 0 \\ Z1 & 0 \end{Bmatrix}$$

QUESTION 2

Déterminer le degré d’hyperstatisme de la liaison équivalente ainsi que les inconnues hyperstatiques

RÉPONSE

Le degré d’hyperstatisme de la liaison équivalente est :h = Ns - rs

QUESTION 3

Par une étude cinématique, déterminer le torseur cinématique de la liaison équivalente aux deux liaisons (L1) et L2).

RÉPONSE

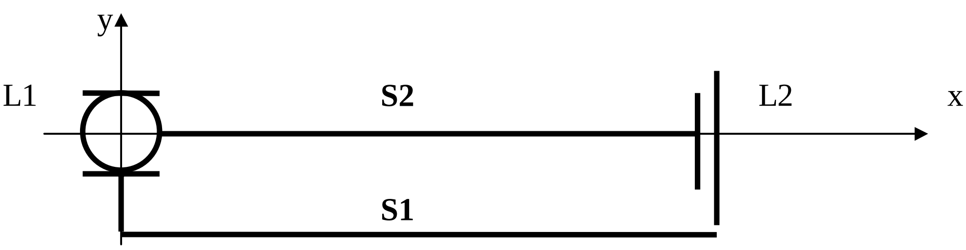
Les torseurs cinématiques des liaisons (L1) et (L2) s’écrivent au point O. dans la hase de R :

QUESTION 4

Pour que la liaison équivalente aux deux liaisons (L1) et (L2) soit une liaison pivot isostatique d'axe (O, $\vec{x}$), proposer plusieurs modifications possibles de la liaison (L2), la liaison (L1) restant inchangée.

RÉPONSE

La liaison équivalente conservant le même degré de mobilité m = 6 - rs = 1, on en déduit que rs = 5.



Les torseurs statiques des liaisons (L1) et (L2) précédents ont leur forme particulière conservée au même point O et dans la même base de R.

Pour obtenir une autre construction isostatique il faut chercher une liaison (L2) dont le torseur statique a sa forme particulière en un autre point que le point O.

Envisageons de placer en un point A de l'axe (O, $\vec{x}$) une liaison rotule de centre A. Le torseur statique correspondant est :

$$\{\Im\ 2\} = {}_A\begin{Bmatrix} X2 & 0 \\ Y2 & 0 \\ Z2 & 0 \end{Bmatrix}$$

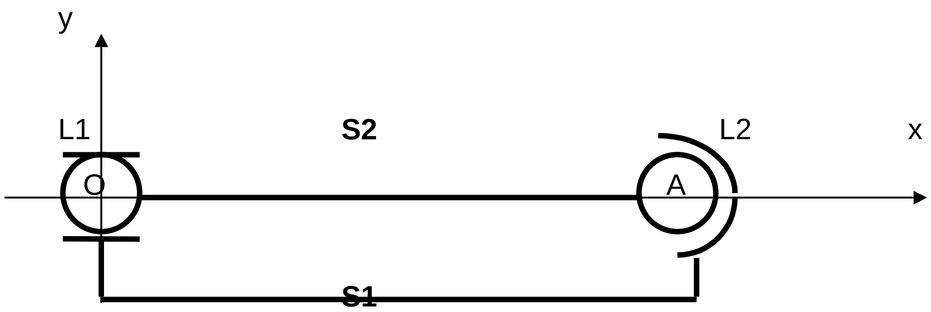
posons :

$$\overrightarrow{OA} = l\,\vec{x} \ avec\ l \neq 0$$

Pour vérifier que cette solution convient écrivons que :

$$\{\Im\ \}_o = \{\Im\ 1\}_o + \{\Im\ 2\}_o$$

d'où les six équations scalaires :



Application 2

Pour vérifier qu'une liaison entre deux pièces (S,) et (S2), réalisée par association en parallèle de six liaisons ponctuelles de normales connues, est complète et isostatique, il suffit d'utiliser la méthode définie précédemment.

Cependant dans ce cas fréquemment rencontré. en particulier dans les montages d'usinage. on vérifie pratiquement qu'il en est ainsi à condition :

- qu'il n'y ait pas plus de trois normales parallèles,
- qu'il n'y ait pas plus de trois normales dans un même plan. ces trois normales étant, ni concourantes en un même point, ni parallèles.
- qu'il n'y ait pas plus de trois normales non coplanaires concourantes en un même point.
- que les six normales soient disposées dans 3 directions différentes.

6. LIAISONS EN SERIE

6.1. DÉFINITION

n liaisons (L1), (L2), ..., (Li), .., (Ln) sont en série entre deux solides (So) et (Sn) si elles sont disposées à la suite l'une de l'autre par l'intermédiaire de (n-1)solides.

Le graphe des liaisons se trace ainsi (figure 8) :

On dit également que les (n + 1) solides assemblés par les n liaisons en série constituent une chaîne continue ouverte.

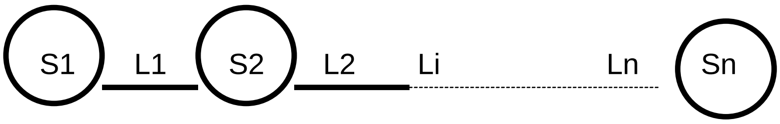


Figure 8

6.2. LIAISON ÉQUIVALENTE

62.1. Torseur statique

Le torseur statique $\{\Im\ i\}$ de la liaison (Li) représente dans cette étude l'action mécanique du solide (S_{i-1}) sur le solide (S_i). Le torseur statique $\{\Im\ \}$ de la liaison équivalente représente l'action mécanique équivalente du solide (So) sur le solide (Sn).

Supposons qu'en plus des actions mécaniques dans les liaisons entre les différents solides, s'exerce sur le solide (So) une action mécanique représentée par le torseur $\{\Im\ 0\}$.

Le principe fondamental de la statique appliqué à (So) s'écrit :

$$\{\Im\ 0\} - \{\Im\ 1\} = \{\vec{0}\}$$

à l'ensemble {(So), (S1)} :

$$\{\Im\ 0\} - \{\Im\ 2\} = \{\vec{0}\}$$

à l'ensemble {(S0), (S1), (S2)} :

$$\{\Im\ 0\} - \{\Im\ 3\} = \{\vec{0}\}$$

et ainsi de suite jusqu'à l'ensemble {(S0), (S1)...... (S_{n-1})}]

$$\{\Im\ 0\} - \{\Im\ n\} = \{\vec{0}\}$$

En écrivant le principe fondamental, appliqué à (S0), avec le torseur statique de la liaison équivalente de l'action mécanique de (So) sur (Sn), on obtient : $\{\Im\ 0\} - \{\Im\ \} = \{\vec{0}\}$

En comparant toutes ces relations on en déduit que le torseur statique de la liaison équivalente doit vérifier :

$$\{\Im\} = \{\Im 1\} = \{\Im 2\} = ... = \{\Im n\} \qquad (5)$$

Par conséquent, si une composante d'un torseur statique d'une liaison (Li) est nulle, la composante correspondante du torseur statique de la liaison équivalente est nulle. Les composantes d'action mécanique transmissibles entre (So) et (Sn) sont donc celles qui sont transmissibles simultanément par les liaisons (Li).

6.2.2. Torseur cinématique

Le torseur cinématique $\{\mathbb{V} i\}$ de la liaison (Li) représente dans cette étude le mouvement du solide (Si) par rapport au solide (S_{i-1}). Le torseur cinématique $\{\mathbb{V}\}$ de la liaison équivalente représente le mouvement du solide (Sn) par rapport au solide (S0).

La relation entre le torseur $\{\mathbb{V}\}$ et les torseurs $\{\mathbb{V} i\}$ s'obtient en écrivant la relation de composition des torseurs cinématiques entre les différents solides en présence :

{V(Sn/So)} = {V (Sn / Sn-1)}+.... +{V (S1 / So) }
soit avec les notations utilisées :

$$\{\mathbb{V}\} = \sum_{i=1}^{n} \{\mathbb{V} i\}$$

Par suite, les composantes de mouvement existant entre (So) et (Sn) sont toutes celles des liaisons (Li).

6.2.3. Hyperstatisme et mobilité

L'écriture de la relation (5) :

$$\{\Im\} = \{\Im 1\} = \{\Im 2\} = ... = \{\Im n\}$$

permet la détermination de toutes les composantes Xi, Yi, Zi, Li, Mi, Ni des torseurs statiques $\{\Im i\}$ en fonction des composantes X, Y, Z, L, M, N du torseur statique $\{\Im\}$ de la liaison équivalente.

Par conséquent, la liaison équivalente aux n liaisons en série entre (So) et (Sn) est toujours isostatique

Définition

Le degré de mobilité m_u de la liaison équivalente aux n liaisons en série entre (So) et (Sn) est égal au nombre d'inconnues cinématiques indépendantes du torseur cinématique de la liaison équivalente.

m_u est aussi appelé degré de mobilité utile de la chaîne continue ouverte.

Le nombre total d'inconnues cinématiques introduit par les n liaisons en série est :

$$Nc = \sum_{i=1}^{n} nc_i$$

Définition

Le degré de mobilité m de la chaîne continue ouverte comprenant n liaisons est égal au nombre Nc d'inconnues cinématiques introduit par les n liaisons.

Soit m = Nc

Comme l'introduction successive de solides intermédiaires entre (So) et (Sn) ne peut qu'augmenter le degré de mobilité de la chaîne continue ouverte, on a toujours : $m \geq m_u$

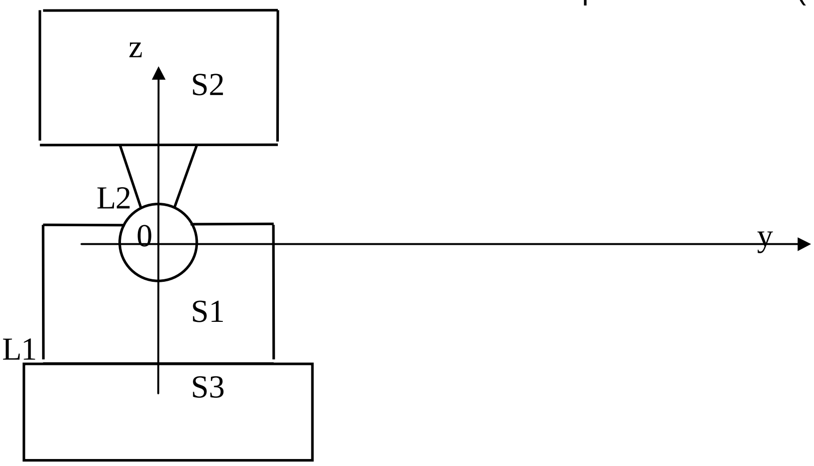
Posons alors : $m = m_u + m_i$

mi est appelé degré de mobilité interne de la chaîne continue ouverte.

Une pièce a une mobilité interne dans un mécanisme (par exemple, une bielle tournant sur elle-même entre deux liaisons rotule) si elle peut avoir un mouvement qui n'entraîne aucun mouvement des autres pièces du mécanisme.

6.2.4. Application

Soit une chaîne continue ouverte constituée par trois solides (So), (S1) et (S2).



La liaison (L2) entre (S1) et (S2) est une liaison rotule de centre O.

La liaison (L1) entre (S0) et (S1) est une liaison appui plan de normale(O, $\vec{z}$).

Soit R(O, $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$) un repère situé sur les liaisons.

QUESTION 1

Déterminer le torseur statique de la liaison équivalente aux deux liaisons en série entre (So) et (S2).

RÉPONSE

Au point O, dans la base de R, les torseurs statiques des liaisons (L1) et (L2) sont de la forme :

QUESTION 2

Par une étude cinématique, déterminer le torseur cinématique de la liaison équivalente aux deux liaisons en série entre (S0) et (S2). En déduire le degré de mobilité interne de la chaîne continue ouverte constituée par (So), (S1) et (S2).

RÉPONSE

7 AVANTAGES ET INCONVENIENTS D’UN MECANISME ISOSTATIQUE PAR RAPPORT A UN MECANISME HYPERSTATIQUE

Dans un mécanisme isostatique, l’absence d’inconnues hyperstatiques indique que la position relative des liaisons n’a pas besoin d’être aussi précise que dans un mécanisme hyperstatique.

D’où :
a) Une facilité de fabrication plus grande par l'absence de tolérances de position réduites à respecter (parallélisme, perpendicularité, coaxialité. . .). Notons que cette facilité de fabrication est en partie compensée par une complexité plus grande du mécanisme. Complexité généralement due à l'introduction de pièces intermédiaires en série dans les liaisons pour augmenter leur nombre de degrés de liberté.
b) Une assurance que les surfaces de liaison sont bien en contact. Par conséquent, une construction isostatique réalise une mise en position précise d'une pièce par rapport à une autre.
c) Une connaissance exacte du torseur statique de chaque liaison, qui permet une évaluation correcte des pressions entre les surfaces en contact.

9. CHAINE CONTINUE FERMÉE

9.1. DÉFINITION

Une chaîne continue ouverte dont les deux solides extrêmes ont une liaison entre eux constitue une chaîne continue fermée.

Dans le cas d'une chaîne continue fermée, celle-ci est constituée de (n + 1) solides assemblés en série par (n + 1) liaisons.

Une chaîne continue fermée est aussi appelée chaîne simple ou boucle.

EXEMPLE

La chaîne cinématique du réducteur représentée figure 13 est une chaîne continue fermée constituée des trois solides suivants :

(S0) : bâti du réducteur

(S1) : arbre d'entrée du réducteur

(S2) : arbre de sortie du réducteur.

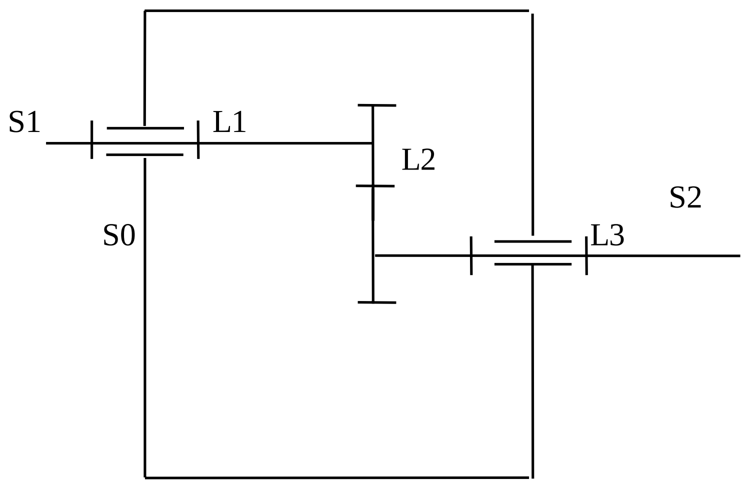


Figure 13

9.2. ÉTUDE STATIQUE

Le torseur statique $\{\Im\ i\}$ de la liaison (Li) représente dans cette étude l'action mécanique du solide (S_{i-1}) sur le solide (S_i).

Soit R(O, $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$) un repère lié au solide (So), que l'on supposera être le bâti supportant la chaîne continue fermée.

Supposons qu'en plus des actions mécaniques dans les liaisons entre les différents solides, s'exerce :

- sur le solide (S1) une action mécanique, dite d'entrée du mécanisme, représentée au point O, dans la base de R, par le torseur :

$$\{\Im\ e\} = {}_O\begin{Bmatrix} Xe & Le \\ Ye & Me \\ Ze & Ne \end{Bmatrix}$$

- sur le solide {Sn) une action mécanique, dite de sortie du mécanisme, représentée au point 0, dans la base de R, par le torseur :

$$\{\Im\ s\} = {}_O\begin{Bmatrix} Xs & Ls \\ Ys & Ms \\ Zs & Ns \end{Bmatrix}$$

- sur le solide (S0) une action mécanique représentée au point O, dans la base de R, par le torseur $\{\Im\ 0\}$ (action mécanique du sol sur le bâti).

Ces trois torseurs sont liés par la relation obtenue en appliquant le principe fondamental de la statique à l'ensemble des (n + 1) solides de la chaîne continue fermée :

$$\{\Im\ e\} + \{\Im\ s\} + \{\Im\ 0\} = \{\ \vec{0}\ \} \qquad (7)$$

soit

Ns = $\sum_{i=1}^{n} nsi$

le nombre d'inconnues statiques introduit par les (n+1) liaisons de la chaîne continue fermée.

Toutes les relations entre ces Ns inconnues statiques s'obtiennent en appliquant le principe fondamental de la statique successivement aux n solides (S1), (S2), ... (Sn).

Montrons qu'il est inutile d'appliquer le principe fondamental de la statique au solide (So).

Pour cela appliquons le principe fondamental de la statique à :

(S1) : $\{\Im\ 1\} - \{\Im\ 2\} + \{\Im\ e\} = \{\ \vec{0}\ \}$

(S2) : $\{\Im\ 2\} - \{\Im\ 3\} = \{\ \vec{0}\ \}$

....

....

(Sn) : $\{\Im\ n\} - \{\Im\ n+1\} + \{\Im\ s\} = \{\ \vec{0}\ \}$

Ajoutons membre à membre ces relations. il reste après simplifications :

$$\{\Im\ 1\} - \{\Im\ n+1\} + \{\Im\ s\} + \{\Im\ e\} = \{\ \vec{0}\ \}$$

Avec la relation (7), il nous reste :

$$- \{\Im\ 1\} + \{\Im\ n+1\} + \{\Im\ 0\} = \{\ \vec{0}\ \}$$

Cette relation traduit l'application du principe fondamental de la statique au solide (S0). Comme elle se déduit des précédentes, il est inutile d'appliquer le principe fondamental de la statique au solide (S0).

Soit r_s le nombre d'équations scalaires indépendantes entre les Ns inconnues statiques

($r_s \leq 6n$).

Définition

Le degré d'Hyperstatisme h de la chaîne continue fermée est égal au nombre N_s d'inconnues statiques introduit par les liaisons, moins le nombre r_s de relations indépendantes entre ces inconnues.

Soit $h = N_s - r_s$. (8)

Dans cette étude statique, on montre que le degré de mobilité m de la chaîne continue fermée est :

$m = 6n - r_s$ (9)

m représente le nombre d'inconnues cinématiques indépendantes de la chaîne continue fermée. Par conséquent m comprend le degré de mobilité interne de la chaîne continue fermée.
En éliminant rs entre (8) et (9), on obtient la relation suivante entre le degré d'Hyperstatisme h et le degré de mobilité m :
$h = m + N_s - 6n$.

Soit : $Nc = \sum_{i=1}^{i=n+1} nc_i$ le nombre d'inconnues cinématiques introduit par les (n + 1) liaisons. Sachant que :
$nc_i = 6 - ns_i$, Nc s'écrit :

$$Nc = \sum_{i=1}^{i=n+1} (6 - ns_i)$$

soit:
$Nc = 6 (n + 1) - Ns$.
Par suite :

$h = m + 6 - Nc$. (10)
Cette relation permet le calcul du degré d'Hyperstatisme connaissant le degré de mobilité.
Nous allons mettre en évidence dans l'étude qui suit, une méthode simple pour déterminer le degré de mobilité de chaîne continue fermée.

9.3. ÉTUDE CINÉMATIQUE

Le torseur cinématique $\{ V \}$ de la liaison (Li) représente dans cette étude le mouvement du solide (Si) par rapport au solide (Si-1).
En écrivant la relation de composition des torseurs cinématiques entre les différents solides en présence, on obtient :

$$\{ V (So / So)\}=\{ V (So / Sn)\}+\{ V (Sn / Sn\text{-}1)\}+...+\{ V (S1 / So)\}= \left\{ \vec{0} \right\}.$$

Soit avec les notations utilisées :

$$\sum_{i=1}^{i=n+1} \left\{ Vi \right\} = \left\{ \vec{0} \right\}$$

En explicitant cette relation on obtient un système de six équations scalaires pour déterminer les Nc inconnues cinématiques.
Soit rc le nombre d'équations scalaires indépendantes ($rc \leq 6$)

Définition

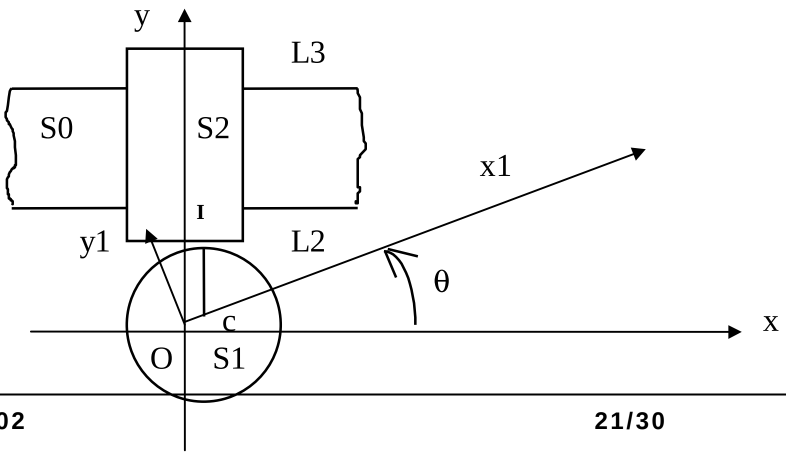
Le degré de mobilité m de la chaîne continue fermée est égal au nombre Nc d'inconnues cinématiques introduit par les liaisons, moins le nombre r_c de relations indépendantes entre ces inconnues.

Soit $m = Nc - r_c$

On peut également dire que le degré de mobilité de la chaîne continue fermée est le nombre d'inconnues cinématiques indépendantes qu'il faut se fixer pour déterminer toutes les autres.

9.4. APPLICATION

Considérons un mécanisme de commande d'une tige par un excentrique.
Soit R(O, $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$) un repère lié au bâti (S0).



L1

Figure 14

L'excentrique (S1) est assimilé à un cylindre de révolution d'axe (C, $\vec{z}$),de rayon a. (S1) a une liaison pivot (L1) d'axe (O, $\vec{z}$) avec (S0).

Soit R1(O, $\vec{x}1, \vec{y}1, \vec{z}$) un repère lié à (S1) tel que: $\overrightarrow{OC} = e\vec{x}1$, (e > 0).

On pose : $\Theta = \vec{x}, \vec{x}1$

La tige (S2), cylindrique de révolution. a une liaison pivot glissant (L3) d'axe (O, $\vec{y}$) avec (S0).

(S1) et (S2) ont une liaison linéique rectiligne (L2) d'axe (I, $\vec{z}$) et de normale $\vec{y}$:

QUESTION 1

Par une étude cinématique déterminer le degré de mobilité de la chaîne continue fermée (So) - (S1) - (S2) - (S0). En déduire son degré d'Hyperstatisme.

RÉPONSE

Avec les notations définies précédemment les torseurs cinématiques $\{ V \}$ des liaisons (L) sont, dans R, de la forme :

QUESTION 2

Par une étude statique, déterminer l'inconnue hyperstatique de la chaîne continue fermée. Proposer une solution pour rendre ce mécanisme isostatique.

RÉPONSE

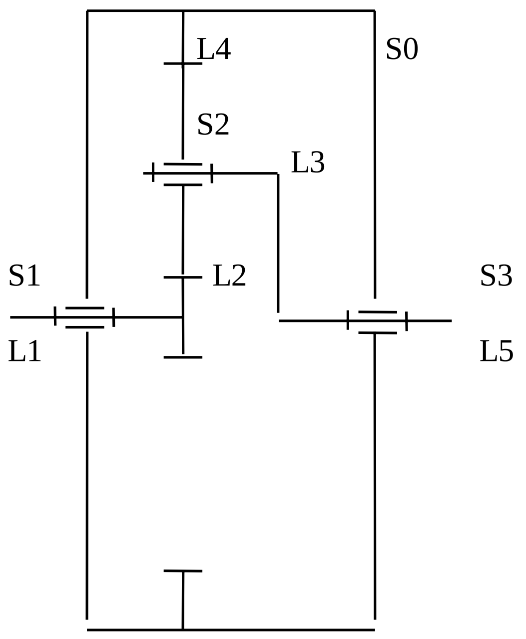
- Appliquons le principe fondamental de la statique à (S1), puis à (S2), en supposant que s'exerce :

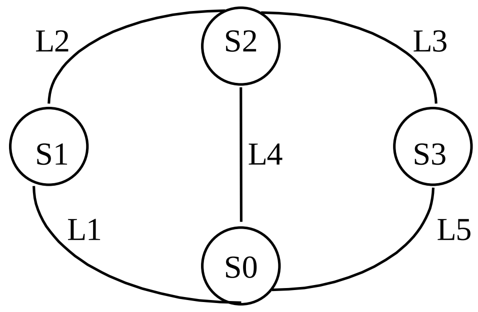
10 Chaîne complexe

10.1 DEFINITION

une chaîne complexe est une chaîne cinématique constituée de plusieurs chaînes continues fermées imbriquées.

La chaîne cinématique du réducteur à train épicycloïdal schématisé figure 15 est une chaîne complexe constituée de deux chaînes continues fermées imbriquées, comme l'indique son graphe des liaisons.





10.2 NOMBRE CYCLOMATIQUE DE LA CHAÎNE COMPLEXE

Soient n le nombre de solides et l le nombre de liaisons de la chaîne complexe. On montre (théorie des graphes) que le nombre de chaînes continues fermées indépendantes à étudier est :

$\gamma = l - n + 1$

γ est appelé nombre cyclomatique de la chaîne complexe.

Pour l'exemple précédent : l = 5 et n = 4. Par suite : $\gamma = 2$.

10.3 ÉTUDE STATIQUE

Soit Ns le nombre d'inconnues statiques introduit par les l liaisons.

En appliquant le principe fondamental de la statique successivement à (n - 1) solides de la chaîne complexe on obtient 6(n - 1) équations scalaires entre les Ns inconnues statiques.

Soit rs le nombre d'équations scalaires indépendantes (rs $\leq$ 6 (n - 1)) .

Définition

Le degré d'hyperstatisme h de la chaîne complexe est :

$h = Ns - rs.$ (1 0)

On montre dans cette étude statique que le degré de mobilité m de la chaîne complexe est :

$m = 6 (n - 1) - rs .$ (11)

En éliminant rs entre (10) et (1 1) on obtient entre le degré d'Hyperstatisme h et le degré de mobilité m la relation suivante :

$h = m + Ns - 6 (n - i).$

Soit $Nc= \sum_{i=1}^{l} nci$ le nombre d'inconnues cinématiques introduit par les l liaisons.

Sachant que $nci = 6 - ns$, Nc s'écrit :

$Nc = \sum_{i=1}^{l} (6 - ns\ i)$

Soit $NC = 6l - Ns.$

Par suite
$h = m + 6l - 6 (n -1) - Nc$
ou $h = m + 6 (l - n + 1) - Nc$
avec $\gamma = l - n +1$, on obtient :

$h = m + 6\gamma - Nc.$

Cette relation permet le calcul de degré d'Hyperstatisme connaissant le degré de mobilité de la chaîne complexe.

10.4 ÉTUDE CINÉMATIQUE

En écrivant pour les γ chaînes continues fermées la loi de composition des torseurs cinématiques, comme au paragraphe 9.3, on obtient 6γ relations scalaires entres les Nc inconnues cinématiques de la chaîne complexe.

Soit rc le nombre d'équations scalaires indépendantes ($rc \leq 6\gamma$).

Définition

Le degré de mobilité m de la chaîne complexe est :

$m = Nc - rc$

10.5 APPLICATION

Considérons un étau serrant une pièce (S3) de forme parallélépipèdique.

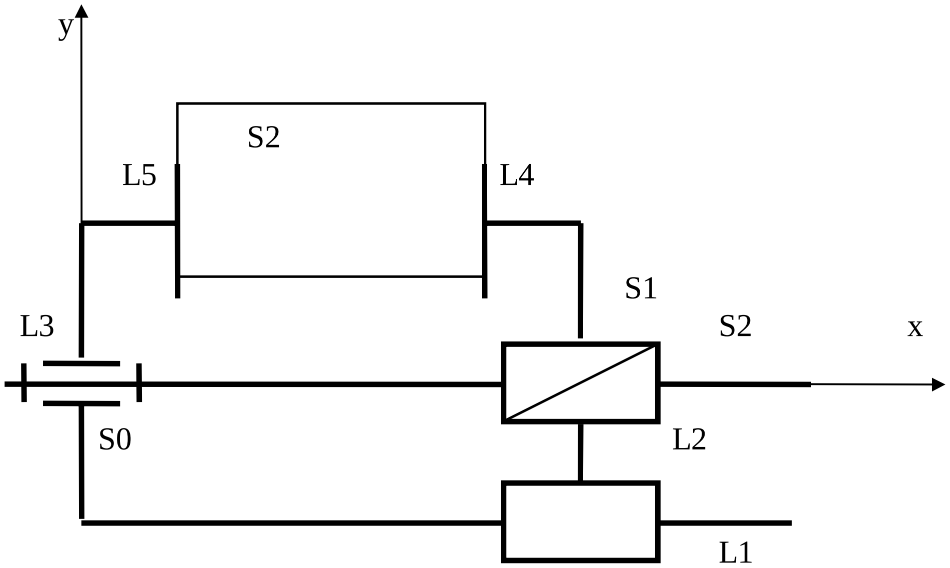


Fig. 16

Soit R(O, $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$) un repère lié au mors fixe (S0) de l'étau.

Le mors mobile (S1) a une liaison glissière (L1) de direction $\vec{x}$ avec (S0).

La vis de manœuvre (S2) a une liaison pivot (L3) d'axe (O, $\vec{x}$) avec (S0), et une liaison glissière hélicoïdale (L2) d'axe (O, $\vec{x}$) avec (S1).

Les liaisons de la pièce (S3) avec le mors fixe (So) et le mors mobile (S1) sont deux liaisons planes (L5) et (L4) respectivement, de normale $\vec{x}$.

QUESTION 1

Tracer le graphe des liaisons et déterminer le nombre de chaînes continues fermées indépendantes de ce mécanisme.

RÉPONSE

Le graphe des liaisons se trace ainsi :

QUESTION 2

Par une étude cinématique déterminer le degré de mobilité de la chaîne complexe. En déduire son degré d'hyperstatisme.

RÉPONSE

Tous les torseurs cinématiques (ou statiques) des liaisons ont leur forme particulière au point O, dans la base de R (liaisons concentriques).

Posons :

QUESTION 3

Par une étude statique déterminer les inconnues hyperstatiques du mécanisme. A quelles conditions dimensionnelles et angulaires de position relative des liaisons correspondent elles ?

RÉPONSE

Définissons les torseurs statiques des liaisons au point O, dans la base de R.

A SAVOIR

1. Liaisons en parallèle

le torseur statique de la liaison équivalente est tel que :

$$\{\Im\} = \sum_{i=1}^{n} \{\tau_i\}$$

Le torseur cinématique de la liaison équivalente vérifie :

$$\{ V \} = \{ V1 \} = \{ V2 \} \dots$$

La liaison équivalente a pour :

- degré d'Hyperstatisme : h = Ns - rs ;
- degré de mobilité : m = 6 - rs.

2. Liaisons en série Le torseur statique de la liaison équivalente vérifie :

$$\{\Im\} = \{\Im 1\} = \{\Im 2\} = \dots$$

Le torseur cinématique de la liaison équivalente est tel que :

$$\{ V \} = \sum_{i=1}^{n} \{ Vi \}$$

La liaison équivalente est isostatique et a pour degré de mobilité m_u (nombre d'inconnues cinématiques indépendantes de son torseur cinématique).

Le degré de mobilité interne m_i de la chaîne continue ouverte est tel que :

$Nc = m_u + m_i$.

3 Chaîne continue fermée

Les torseurs cinématiques des (n + 1) liaisons de la chaîne continue fermée vérifient la relation :

$$\sum_{i=1}^{n+1} \{ Vi \} = \{ \vec{0} \}$$

La chaîne continue fermée a pour :

- degré de mobilité : m = Nc - rc ;
- degré d'Hyperstatisme : h = m + 6 - Nc .

4. Chaîne complexe

Le nombre de chaînes continues fermées indépendantes à étudier est : $\gamma = l - n + 1$. La chaîne complexe a pour :

- degré de mobilité : m = Nc - rc ;
- degré d'Hyperstatisme : $h = m + 6\gamma - Nc$.

Le robot de manutention représenté figure 18 est utilisé pour le déplacement de pièces d'un poste de travail (T1) à un poste de travail (T2). Soit R(O, $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$) un repère lié au bâti (S0) du robot. La glissière (S2) a deux liaisons pivot glissant (L1) et (L2) d'axes (H, $\vec{x}$) et (K, $\vec{x}$) avec (S0), telles que

$$\overrightarrow{OH} = -l\vec{z} \text{ et } \overrightarrow{OK} = l\vec{z} \; (l > 0)$$

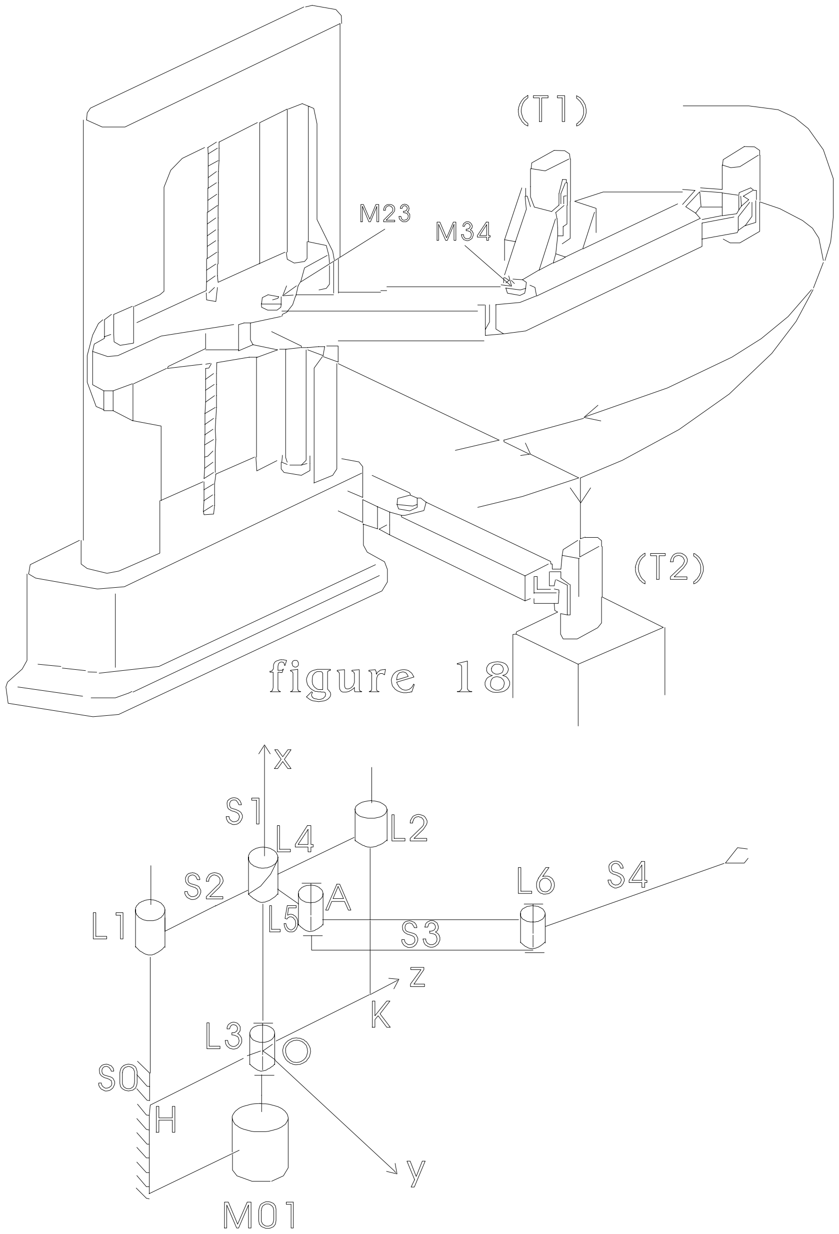


figure 18

La glissière (S2) est entraînée par une vis (S1) ayant une liaison pivot (L3) d'axe (O, $\vec{x}$) avec (So), et une liaison glissière hélicoïdale (L4) d'axe (O, $\vec{x}$) et de pas réduit p avec (S2). Cette vis est animée par un moteur (M01) lié au bâti (S0).

Le bras (S3) a une liaison pivot (L3) d'axe (A, $\vec{x}$) avec la glissière (S2).

Le bras (S4) a une liaison pivot (L6) d'axe (B, $\vec{x}$) avec le bras (S3). A son extrémité est fixée la pince de serrage.

Les rotations des bras sont obtenues par deux moteurs (M23) et (M34).

QUESTION 1

Tracer le graphe des liaisons entre les pièces (S0), (S1) et (S2).

RÉPONSE

Le graphe des liaisons se trace ainsi :

Fig. 19

QUESTION 2

Quel est le degré d'hyperstatisme de la liaison équivalente aux deux liaisons en parallèle (L1) et (L2) entre (So) et (S2) ? Quelles sont les inconnues hyperstatiques ? A quelles conditions géométriques de position relative des liaisons correspondent-elles ?

RÉPONSE

Les torseurs statiques des liaisons (L1) et (L2) sont aux points H et K respectivement, dans la base de R, de la forme :

QUESTION 3

Quel est le degré d'hyperstatisme de la chaîne continue fermée (So)-(S1)-(S2)-(S0) (en faisant abstraction du moteur (M01)) ?

RÉPONSE

Déterminons le degré d'hyperstatisme par une étude cinématique. Pour cela définissons les torseurs cinématiques des liaisons. en considérant la liaison équivalente entre (S0) et (S2).

QUESTION 4

Déterminer les inconnues hyperstatiques de la chaîne continue fermée (So)-(S1)-(S2)-(S0).
A quelles conditions géométriques de position relative des liaisons correspondent-elles?
Proposer une modification de la liaison (L4) pour rendre le mécanisme isostatique et ainsi minimiser l'incidence des actions mécaniques supportées par la vis (S1).

RÉPONSE

CONSEILS POUR LA RÉSOLUTION

- Pour faciliter les calculs et l'interprétation des résultats, choisir soigneusement le point et la base où seront exprimés les torseurs statiques et cinématiques des liaisons.

- Toutes les caractéristiques d'une liaison équivalente à plusieurs liaisons en parallèle s'obtiennent facilement par une étude statique (torseur statique, degré d'Hyperstatisme. degré de mobilité, inconnues hyperstatiques),

- Une étude cinématique donne rapidement le torseur cinématique. et par conséquent le torseur statique, de la liaison équivalente à plusieurs liaisons en série, et met en évidence les mobilités internes.

- Pour traiter une chaîne continue fermée il est parfois plus simple de remplacer plusieurs liaisons par leur liaison équivalente, et de chercher d'abord les caractéristiques de la liaison équivalente avant d'étudier les liaisons qui la compose.

Pour déterminer le degré d'Hyperstatisme d'une chaîne continue fermée une étude cinématique est beaucoup plus simple qu'une étude statique, car elle ne fait intervenir au maximum que six équations C'est seulement si l'on veut localiser les inconnues hyperstatiques qu'il faut aborder une étude statique.