

**Objectifs :**

- Modéliser mathématiquement une action mécanique ;
- Calculer un moment ;
- Décrire une action mécanique par un torseur en un point ;
- Déterminer l'action mécanique transmissible par une liaison mécanique parfaite.

## Statique

### Modélisation des actions mécaniques

#### 1. Définition d'une action mécanique

D'une façon générale, on appelle action mécanique toute cause physique susceptible de maintenir un corps au repos, de créer, de maintenir ou de modifier un mouvement, de déformer un corps.

#### 2. Classification des actions mécaniques

Les actions mécaniques sont de deux sortes:

- Les actions mécaniques à distance (champ de pesanteur, champ électromagnétique)
- Les actions mécaniques de contact (liaisons surfaciques...)

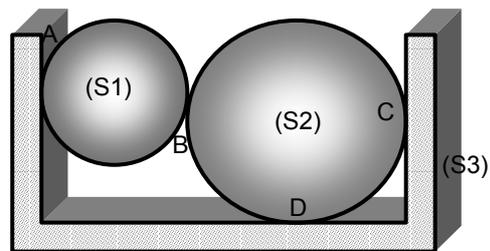
On distingue les actions mécaniques **extérieures** et **intérieures** à un ensemble de corps.

Soient 3 solides ( $S_1$ ), ( $S_2$ ), ( $S_3$ ).

Soit (E) l'ensemble constitué par les 2 corps ( $S_1$ ) et ( $S_2$ ).

Bilan des actions mécaniques extérieures qui agissent sur le solide (E) :

- Poids
- Action de ( $S_3$ ) sur (E)



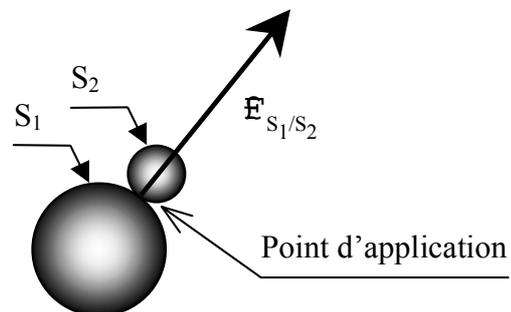
#### 3. Le torseur d'action mécanique

##### 3.1. Notion de force

On appelle **force**, l'action mécanique qui s'exerce mutuellement entre deux particules élémentaires, pas forcément en contact.

Une force est toujours appliquée en un point. Elle est modélisée par un vecteur, caractérisé par :

- Un point d'application ;
- Une direction ;
- Un sens ;
- Une norme (intensité).



Unité : Newton

Notation :  $\mathbb{F}_{\text{solide extérieur} \rightarrow \text{solide isolé}}$

##### 3.2. Notion de moment

###### 3.2.1. Moment d'une force par rapport à un point

Les effets physiques d'une A.M. dépendent de la position et de l'orientation dans l'espace de la force  $\mathbb{F}$  associée à cette A.M. On est amené à introduire la notion de **moment de la force  $\mathbb{F}$**  pour caractériser complètement l'A.M.

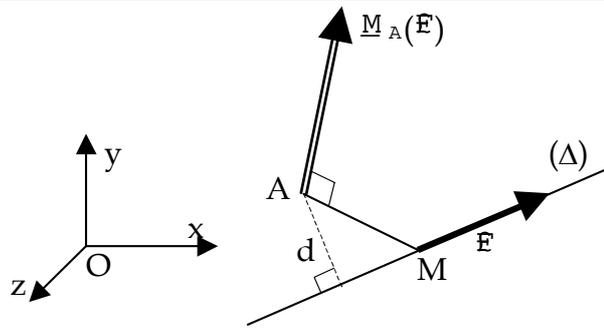
On appelle moment par rapport au point A de la force  $\mathcal{F}_{1 \rightarrow 2}$  appliquée au point M, le vecteur d'origine A défini par la relation :

$$\underline{M}_A(\mathcal{F}_{1 \rightarrow 2}) = \underline{AM} \times \mathcal{F}_{(1 \rightarrow 2)}$$

Unité : Newton-mètre (Nm)

Corollaire : La relation ci-dessus reste valable pour n'importe quel point B appartenant à la direction  $(\Delta)$  de  $\mathcal{F}$  :

$$\forall B \in \Delta, \underline{M}_A(\mathcal{F}_{1 \rightarrow 2}) = \underline{AB} \times \mathcal{F}_{(1 \rightarrow 2)}$$



### 3.2.2. Autre formule : Bras de levier

$$\| \underline{M}_A(\mathcal{F}_{\text{solide 1} \rightarrow \text{solide 2}}) \| = d \cdot \| \mathcal{F}_{(\text{solide 1} \rightarrow \text{solide 2})} \|$$

### 3.2.3. Définition géométrique du vecteur $\underline{M}_A(\mathcal{F}_{\text{solide 1} \rightarrow \text{solide 2}})$

- origine : point A
- direction : perpendiculaire au plan  $(\mathcal{F}_{\text{solide 1} \rightarrow \text{solide 2}} ; \underline{AM})$
- sens :  $\underline{AM}, \mathcal{F}_{\text{solide 1} \rightarrow \text{solide 2}}$  et  $\underline{M}_A$  forment un trièdre direct

### 3.2.4. Relation fondamentale sur les moments

Soit  $\mathcal{F}_{\text{solide 1} \rightarrow \text{solide 2}}$  une force appliquée en M, et deux points quelconques A et B. On sait, par définition, que :

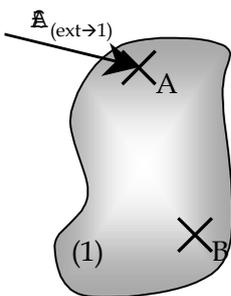
$$\underline{M}_A(\mathcal{F}_{\text{solide 1} \rightarrow \text{solide 2}}) = \underline{AM} \times \mathcal{F}_{(\text{solide 1} \rightarrow \text{solide 2})}$$

Et

$$\underline{M}_B(\mathcal{F}_{\text{solide 1} \rightarrow \text{solide 2}}) = \underline{BM} \times \mathcal{F}_{(\text{solide 1} \rightarrow \text{solide 2})}$$

Or  $\underline{BM} = \underline{BA} + \underline{AM}$ , par conséquent :

$$\underline{M}_B(\mathcal{F}_{\text{sol. 1} \rightarrow \text{sol. 2}}) = \underline{M}_A(\mathcal{F}_{\text{sol. 1} \rightarrow \text{sol. 2}}) + \underline{BA} \times \mathcal{F}_{(\text{sol. 1} \rightarrow \text{sol. 2})}$$



### 3.3. Champ de l'action mécanique d'une force sur un solide

L'action mécanique sur un solide 1 exercée par une force  $\mathcal{F}_{A(\text{ext} \rightarrow 1)}$  appliquée en un point A de ce solide, se modélise en un point B quelconque par deux champs :

- un champ uniforme défini par  $\mathcal{R}_{(\text{ext} \rightarrow 1)} = \mathcal{F}_{A(\text{ext} \rightarrow 1)}$  appelé **Résultante générale**.
- un champ de moment défini en tout point B par :

$$\underline{M}_B(\mathcal{F}_{A(\text{ext} \rightarrow 1)}) = \underline{BA} \times \mathcal{F}_{A(\text{ext} \rightarrow 1)} \quad \text{appelé **Moment résultant** .}$$

### 3.4. Torseur associé à l'action mécanique d'une force

Pour définir complètement une A.M. nous avons donc besoin des vecteurs  $\mathcal{R}_{(\text{ext} \rightarrow 1)}$  et  $\underline{M}_B(\mathcal{F}_{A(\text{ext} \rightarrow 1)})$ .

L'ensemble des deux vecteurs  $\mathcal{R}_{(\text{ext} \rightarrow 1)}$  et  $\underline{M}_B(\mathcal{F}_{A(\text{ext} \rightarrow 1)})$ , définis en tout point B, est appelé **torseur** associé à l'action mécanique relative à la force  $\mathcal{F}_{A(\text{ext} \rightarrow 1)}$ .

Il est noté :

$$\{\mathcal{C}_{(\text{ext} \rightarrow 1)}\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{(\text{ext} \rightarrow 1)} \\ \vec{MB}_{(\text{ext} \rightarrow 1)} \end{array} \right\}_{B, R} = \left\{ \begin{array}{l} X \\ Y \\ Z \end{array} \middle| \begin{array}{l} L \\ M \\ N \end{array} \right\}_{B, R}$$

Composantes de la résultante

Composantes du moment résultant

Point de réduction

Repère de projection

Remarques :

↪ Le point B n'est pas nécessairement un point appartenant au solide 1 ;

↪  $\mathfrak{R}_{(\text{ext} \rightarrow 1)}$  et  $\_M_{B(\text{ext} \rightarrow 1)}$  sont appelés *éléments de réduction* du torseur  $\{\mathbb{C}_{(\text{ext} \rightarrow 1)}\}$  ;

3.5. Actions mécaniques particulières3.5.1. Torseur glisseur

On appelle **torseur glisseur**, tout torseur associé à une action mécanique dont le moment est nul en un point.

$$\{\mathbb{C}_{(\text{ext} \rightarrow 1)}\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}(\text{ext} \rightarrow 1) \neq \vec{0} \\ \vec{MA}(\text{ext} \rightarrow 1) = \vec{0} \end{array} \right\}_A$$

3.5.2. Torseur couple

On appelle **torseur couple**, tout torseur associé à une action mécanique dont la résultante est nulle.

$$\{\mathbb{C}_{(\text{ext} \rightarrow 1)}\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ \vec{MA}(\text{ext} \rightarrow 1) \neq \vec{0} \end{array} \right\}_A$$

Remarque : les éléments de réduction d'un torseur couple sont les mêmes en tout point.

3.6. Théorème du changement de centre de réduction – Somme de deux torseurs3.6.1. Changement de centre de réduction

$$\text{Soit : } \{\mathbb{C}_{(\text{ext} \rightarrow 1)}\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}(\text{ext} \rightarrow 1) \\ \vec{MA}(\text{ext} \rightarrow 1) \end{array} \right\}_A \quad \left| \begin{array}{l} \text{au point B :} \\ \text{Avec :} \end{array} \right. \quad \{\mathbb{C}_{(\text{ext} \rightarrow 1)}\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}(\text{ext} \rightarrow 1) \\ \vec{MB}(\text{ext} \rightarrow 1) \end{array} \right\}_B$$

$$\_M_{B(\text{ext} \rightarrow 1)} = \_M_{A(\text{ext} \rightarrow 1)} + \_BA \times \mathfrak{R}_{(\text{ext} \rightarrow 1)}$$

3.6.2. Somme de deux torseurs

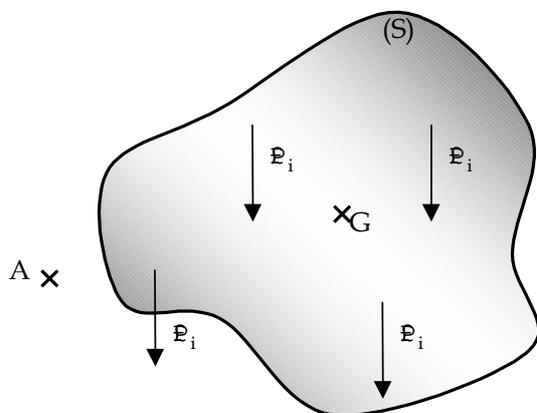
$$\text{Soient : } \{\mathbb{C}_{(1 \rightarrow 2)}\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}(1 \rightarrow 2) \\ \vec{MA}(1 \rightarrow 2) \end{array} \right\}_A \quad \left| \begin{array}{l} \text{alors :} \\ \text{et} \end{array} \right. \quad \{\mathbb{C}_{(1 \rightarrow 2)}\} + \{\mathbb{C}_{(3 \rightarrow 2)}\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}(1 \rightarrow 2) + \vec{R}(3 \rightarrow 2) \\ \vec{MA}(1 \rightarrow 2) + \vec{MA}(3 \rightarrow 2) \end{array} \right\}_A$$

$$\text{et } \{\mathbb{C}_{(3 \rightarrow 2)}\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}(3 \rightarrow 2) \\ \vec{MA}(3 \rightarrow 2) \end{array} \right\}_A$$

**Remarque importante** : La somme de deux torseurs implique que les éléments de réduction de ceux-ci soient considérés au même point.

4. Modélisation des actions à distance4.1. Définition

L'action mécanique de 1 sur 2 est dite « à distance », si elle ne résulte pas d'une liaison mécanique entre 1 et 2.

4.2. Cas du champ de pesanteur

en un point quelconque A :

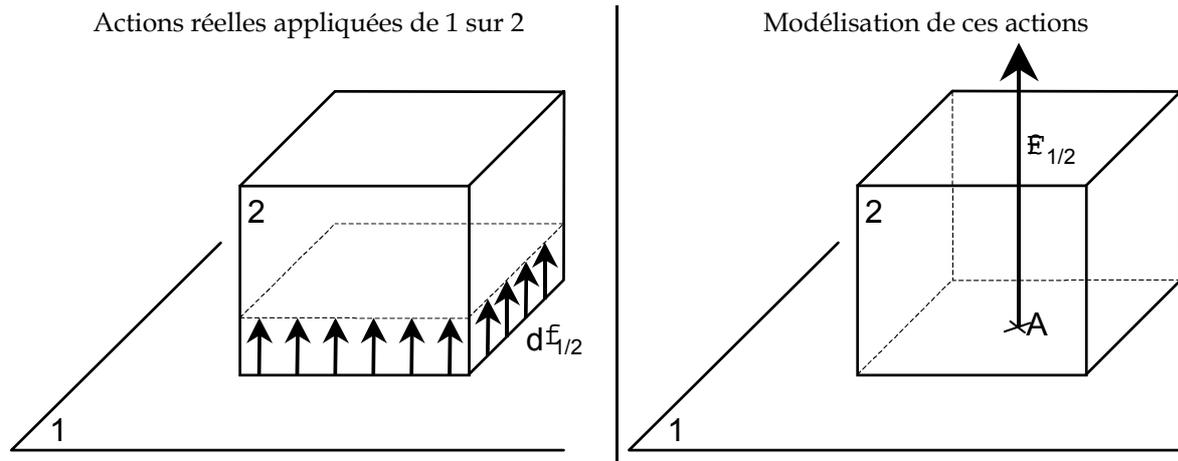
$$\{\mathbb{C}_{(\text{pes} \rightarrow S)}\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}(\text{pes} \rightarrow S) = \sum_{i=1}^n \vec{p}_i = \vec{P} \\ \vec{MG}(\text{pes} \rightarrow S) = \sum_{i=1}^n (\vec{AM}_i \times \vec{p}_i) \end{array} \right\}_{A,R}$$

au centre de gravité G :

$$\{\mathbb{C}_{(\text{pes} \rightarrow S)}\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}(\text{pes} \rightarrow S) = \vec{P} \\ \vec{MG}(\text{pes} \rightarrow S) = \vec{0} \end{array} \right\}_{G,R}$$

## 5. Modélisation de l'action mécanique de surface

### 5.1. Action de surface entre deux solides

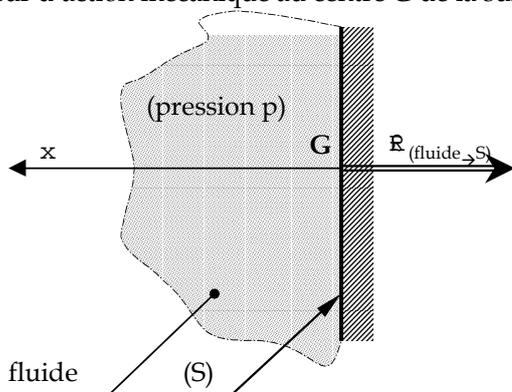


L'action mécanique de contact surfacique est modélisable par un vecteur  $\mathcal{F}_{1/2}$  tel que :

- Point d'application : A ;
- Direction : perpendiculaire au plan tangent commun ;
- Sens : de 1 vers 2
- Intensité :  $\|\mathcal{F}_{1/2}\| = \sum df_{1/2}$

### 5.2. Action mécanique due à la pression d'un fluide sur une surface plane

Les actions mécaniques de contact d'un fluide sur une surface plane (S) peuvent se modéliser par un torseur d'action mécanique au centre G de la surface (S) tel que :



$$\{\mathcal{C}_{(\text{fluide} \rightarrow S)}\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}(\text{f} \rightarrow S) = -p \cdot S \cdot \vec{x} \\ \vec{MG}(\text{f} \rightarrow S) = \vec{0} \end{array} \right\}_G$$

avec :

- p : pression du fluide, exercée sur la surface (S). Cette pression est supposée uniforme ;
- S : aire de (S) ;
- x : normale extérieure à la paroi.

Unités légales :

p en Pa  
S en m<sup>2</sup>  
 $\|\mathcal{F}R\|$  en N

Autres unités :

p en MPa  
S en mm<sup>2</sup>  
 $\|\mathcal{F}R\|$  en N

Unités pratiques :

p en bars  
S en cm<sup>2</sup>  
 $\|\mathcal{F}R\|$  en saN

$$1 \text{ MPa} = 10^6 \text{ Pa} = 1 \text{ N/mm}^2 = 10 \text{ b}$$

## 6. Action transmissible par une liaison parfaite (dans l'espace)

Soient 1 et 2 deux solides en contact.

### 6.1. Hypothèses

Une liaison parfaite entre deux solides 1 et 2 est caractérisée par :

- Des surfaces de liaison géométriquement parfaites et indéformables ;
- Des ajustements sans jeu ;
- Des contacts sans frottement.

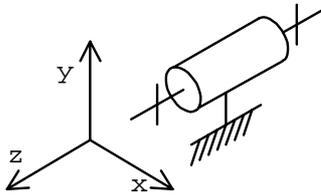
### 6.2. Relation avec les degrés de liberté d'une liaison

Les mouvements possibles du solide 2 par rapport au solide 1 sont notés  $R_x, R_y$  et  $R_z$  (rotations) et  $T_x, T_y$  et  $T_z$  (translations).

Si un mouvement (rotation ou translation) est possible suivant un axe, alors il n'y a pas de composante d'effort (respectivement couple ou force) transmissible suivant cet axe.

NB : La liaison glissière hélicoïdale est une exception.

### 6.3. Exemple : La liaison pivot



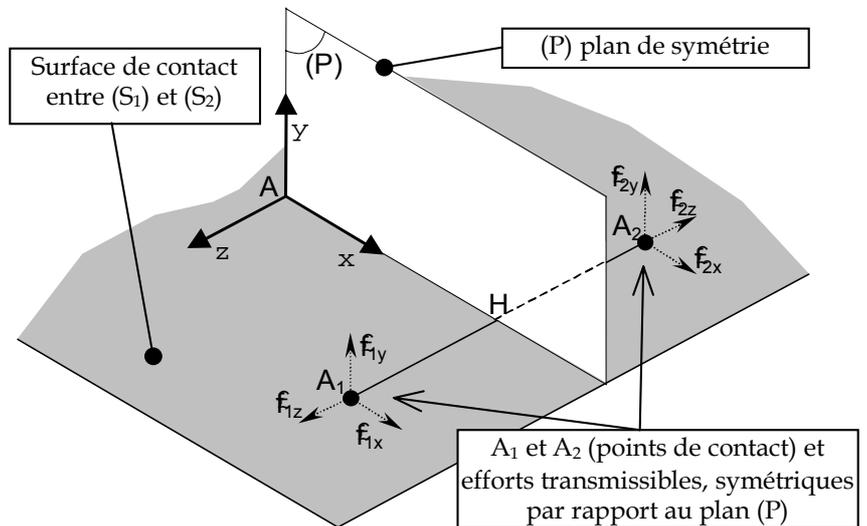
Mobilités		Action transmissible	
		(force)	(couple)
$T_x = 0$	$R_x = 0$	$X \neq 0$	$L \neq 0$
$T_y = 0$	$R_y = 0$	$Y \neq 0$	$M \neq 0$
$T_z = 0$	$R_z = 1$	$Z \neq 0$	$N = 0$

## 7. Modélisation plan des actions mécaniques

Dans certains cas, l'étude du mécanisme dans l'espace peut être délicate. On recherche alors une possibilité de réduire l'étude à un problème plan, sous certaines hypothèses.

### 7.1. Hypothèses

- La surface de contact a une géométrie et des actions transmissibles qui présentent une symétrie par rapport à un plan ;
- On choisit alors un repère local dont les axes sont confondus avec les axes de symétrie de la liaison.



### 7.2. Simplification :

Lorsque les hypothèses sont réunies, l'écriture du torseur d'action mécanique transmissible par la liaison se simplifie. Subsistent :

- La composante du moment portée par l'axe perpendiculaire au plan de symétrie ;
- Les composantes de la résultante contenues dans le plan de symétrie.

Dans notre exemple, le plan de symétrie est  $(A, \vec{x}, \vec{y})$ , le torseur en A associé aux efforts transmissibles par cette liaison a la forme :

Forme générale :	Simplification :	Forme simplifiée (symétrie) :
$\{\mathcal{T}_{(S2/S1)}\} = \begin{Bmatrix} X_{S1}^{S2} & L_{S1}^{S2} \\ Y_{S1}^{S2} & M_{S1}^{S2} \\ Z_{S1}^{S2} & N_{S1}^{S2} \end{Bmatrix}_{A,R}$ <p>(6 inconnues)</p>	$\begin{Bmatrix} X_{S1}^{S2} & \cancel{L_{S1}^{S2}} \\ Y_{S1}^{S2} & M_{S1}^{S2} \\ \cancel{Z_{S1}^{S2}} & N_{S1}^{S2} \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} X_{S1}^{S2} & 0 \\ Y_{S1}^{S2} & 0 \\ 0 & N_{S1}^{S2} \end{Bmatrix}_{A, \vec{x}, \vec{y}}$ <p>(3 inconnues)</p>

Pour une liaison parfaite particulière, parmi les composantes ci-dessus, certaines sont nulles. Mais il n'y a jamais plus de trois inconnues.

### Généralisation :

Un mécanisme dont toutes les pièces utiles admettent un même plan de symétrie pour la géométrie et les efforts est un *mécanisme plan*.

**8. Tableau récapitulatif : Liaisons parfaites**

Tableau récapitulatif de quelques torseurs transmissibles par des liaisons parfaites :

Type de liaison et repère local associé $R=(A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$	Schématisation spatiale	Mobilités	Torseur d'action mécanique transmissible	Torseur d'action mécanique Simplifié	Schématisation plan
Pivot d'axe $(A, \vec{x})$		- $R_x$ - - - -	$\begin{Bmatrix} X_2^1 & 0 \\ Y_2^1 & M_2^1 \\ Z_2^1 & N_2^1 \end{Bmatrix}_{A,R}$	Symétrie par rapport à $(A, \vec{y}, \vec{z})$ $\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_2^1 & 0 \\ Z_2^1 & 0 \end{Bmatrix}_{A,\vec{y},\vec{z}}$	
Glissière d'axe $(A, \vec{x})$		$T_x$ - - - - -	$\begin{Bmatrix} 0 & L_2^1 \\ Y_2^1 & M_2^1 \\ Z_2^1 & N_2^1 \end{Bmatrix}_{A,R}$	Symétrie par rapport à $(A, \vec{x}, \vec{z})$ $\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_2^1 \\ Z_2^1 & 0 \end{Bmatrix}_{A,\vec{x},\vec{z}}$	
Pivot glissant d'axe $(A, \vec{x})$		$T_x$ $R_x$ - - - -	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_2^1 & M_2^1 \\ Z_2^1 & N_2^1 \end{Bmatrix}_{A,R}$	Symétrie par rapport à $(A, \vec{y}, \vec{z})$ $\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_2^1 & 0 \\ Z_2^1 & 0 \end{Bmatrix}_{A,\vec{y},\vec{z}}$	
Appui plan De normale $(A, \vec{x})$		- $R_x$ $T_y$ - $T_z$ -	$\begin{Bmatrix} X_2^1 & 0 \\ 0 & M_2^1 \\ 0 & N_2^1 \end{Bmatrix}_{A,R}$	Symétrie par rapport à $(A, \vec{x}, \vec{y})$ $\begin{Bmatrix} X_2^1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & N_2^1 \end{Bmatrix}_{A,\vec{x},\vec{y}}$	
Sphérique de centre A		- $R_x$ - $R_y$ - $R_z$	$\begin{Bmatrix} X_2^1 & 0 \\ Y_2^1 & 0 \\ Z_2^1 & 0 \end{Bmatrix}_{A,R}$	Symétrie par rapport à $(A, \vec{x}, \vec{y})$ $\begin{Bmatrix} X_2^1 & 0 \\ Y_2^1 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{A,\vec{x},\vec{y}}$	
Linéaire circulaire de centre A et d'axe $(A, \vec{x})$		$T_x$ $R_x$ - $R_y$ - $R_z$	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_2^1 & 0 \\ Z_2^1 & 0 \end{Bmatrix}_{A,R}$	Symétrie par rapport à $(A, \vec{x}, \vec{z})$ $\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ Z_2^1 & 0 \end{Bmatrix}_{A,\vec{x},\vec{z}}$	
Linéaire rectiligne de normale $(A, \vec{x})$ droite de contact $(A, \vec{y})$		- $R_x$ $T_y$ $R_y$ $T_z$ -	$\begin{Bmatrix} X_2^1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & N_2^1 \end{Bmatrix}_{A,R}$	Symétrie par rapport à $(A, \vec{x}, \vec{z})$ $\begin{Bmatrix} X_2^1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{A,\vec{x},\vec{z}}$	

Ce tableau n'est pas exhaustif

**NB** : La liaison glissière hélicoïdale ne permet pas une modélisation plane simple : la rotation est fonction de la translation  $\Rightarrow x = \text{Erreur ! } \theta$  ( voir cours ).